Eso que llamamos Lógica

Resumen de los apuntes de la asignatura “*Metodología*”,
del Segundo Curso de Informática, curso 1973-74

Recopilación de artículos publicados en El Cedazo

Macluskey, 2012
con la colaboración de Javier “J” Sedano

Estas páginas están dedicadas a José “Pepe” Cuena Bartolomé, quien, en los albores de la informática, nos enseñó no solamente Lógica, sino también a pensar…

Tus alumnos nunca te lo agradeceremos lo suficiente.

Índice

Prefacio

Querido lector: tienes en tus manos, o mejor, en tu ordenador, un… no sé cómo llamarlo: un libro electrónico, un documento, un estudio arqueológico, unas apostillas, un... qué sé yo, un conjunto de páginas, en definitiva, donde he recopilado los artículos de la serie "**Eso que llamamos Lógica**" que se fueron publicando en El Cedazo (es decir, el blog comunitario de El Tamiz: www.eltamiz.com/elcedazo) entre octubre de 2011 y mayo de 2012.

Podéis acceder al contenido de la serie completa en esta dirección de internet: www.eltamiz.com/elcedazo/eso-que-llamamos-logica.

Además de los artículos publicados por mí, he recopilado también los dos artículos relacionados con la serie que publicó nuestro amigo Javier "J" Sedano, otro editor de El Cedazo: uno, sobre el método de reducción de Karnaugh, y el otro, sobre lógica digital, donde explicaba cómo se diseñan las puertas lógicas que forman la circuitería de todos los artilugios electrónicos. Estos dos artículos se publicaron como "Anexos", y los encontraréis como Apéndices (II y III, respectivamente) al final del libro.

Todos estos artículos, publicados cada pocas semanas, están escritos con la tónica lógica y esperable en una serie de artículos publicados a lo largo de varios meses en un blog. Ahora, para esta recopilación en un único documento, he intentado adecuar la estructura y el discurso al hecho de que la serie está ya completamente escrita, y por tanto no tienen sentido frases muy normales en el blog, como "Dentro de unos días veremos tal y tal cosa" o "Si tenéis dudas, no dudéis en preguntar en los comentarios", etc.

Sin embargo, a pesar de esta adecuación, en los diferentes capítulos del libro se sigue notando claramente su origen "*bloguero*". Eliminarlo hubiera sido tanto como reescribirlo de arriba abajo, y no creo que merezca la pena hacer tal cosa, pues además así, en caso de duda, siempre se puede buscar en las entradas originales publicadas en el blog, ver los comentarios que los lectores hicieron, etc.

Algo parecido ocurre con las notas al pie de página de los artículos originales: al convertirlos a formato libro he preferido incluirlas en el texto principal, pero no todas, sólo las que no se desviaban en exceso del discurso principal. Lo que tiene todo el sentido en el mundo de Internet no tiene por qué ser lo más adecuado en un texto completo. Espero que no se haya perdido mucho con el cambio.

En fin: ojalá que estas páginas os sean de utilidad y que, leyéndolas, aprendáis mucho, pero mucho, mucho, sobre *Eso que llamamos Lógica*.

Macluskey, 2012

Introducción

Como buen informático del Neolítico que soy, soy bastante bueno en Lógica. De veras, bastante bueno, y yo nunca miento. Nunca, jamás... Bueno, *casi* nunca, al menos.

Soy bueno quizá no en la lógica *aristotélica*, por llamarla de algún modo, pero sí, al menos, en la lógica que se debe usar en los algoritmos informáticos… de la lógica o lo que sea por la que se rigen los humanos en sus acciones reconozco que entiendo más bien poco. Aunque, para ser precisos, *era* bueno en lógica: con el paso de los años cada vez entiendo menos mi profesión, mi pueblo, mi país, mi mundo… seguro que soy yo, claro, que son mis neuronas las que han perdido capacidad con el tiempo y ya no entienden montones de cosas que antes comprendían bien. Pero el caso es que en los años 70 y 80 del siglo pasado había que ser bueno en lógica informática si querías prosperar en mi profesión. Y yo lo era.



José Cuena Bartolomé, delante de su amada pizarra, en 1973

O sea, que, además de *tener una rara habilidad* para desarrollar algoritmos eficacísimos para resolver complicados problemas de todo tipo, resulta que también soy bastante bueno en lógica formal. Y no es que lo sea por ciencia infusa, no, sino más bien porque disfruté en mi ya lejana carrera, allá por el principio de los setenta del siglo pasado, de las lecciones de uno de los me-

jores profesores que he tenido a lo largo de mi vida: Don José Cuena Bartolomé. El hecho de que cuarenta años después recuerde perfectamente su nombre, mientras que he olvidado el de la mayoría de los demás profesores que tuve antes y después, ya significa algo.

Aunque, por alguna oscura razón, su asignatura no se denominaba "Lógica", como sería lógico, sino "***Metodología***", vaya Vd. a saber las razones de tal nombre, él nos enseñó la lógica formal de una manera tal que jamás la olvidaríamos ninguno de los alumnos que asistimos a sus lecciones.

Nos enseñó que **la lógica formal era sencilla**. Sencillísima. Con cuatro conceptos básicos bien aprendidos (y esta vez son, literalmente, cuatro) estabas ya preparado para enfrentarte al ominoso mundo de los silogismos y del cálculo proposicional sin el menor problema.

En definitiva: **No hay nada más lógico que la Lógica**, valga la redundancia…

En este librito intitulado "**Eso que llamamos Lógica**" intentaré, *antes simplista que incomprensible*, hacer a los amables lectores de El Cedazo y a aquellos en cuyas manos caiga partícipes de estos conocimientos, siguiendo a rajatabla el método de Don José, apoyándome en mis tal vez maravillosos (aunque obviamente amarillentos, emborronados y encima escritos con una letra infame) apuntes de Segundo de Carrera que conservo como oro en paño.

Don José Cuena, después de haberme enseñado todo lo que sé sobre Lógica, a mí y a los compañeros que me siguieron en cursos subsiguientes, escribió un libro de culto para los informáticos de pro: **Lógica Informática**, publicado en 1985 por Alianza Editorial y en la actualidad debidamente agotado. Luego se dedicó al desarrollo de la Inteligencia Artificial, publicó artículos, más libros… Y Don José nos dejó un mal día de 1999. Allá donde te encuentres, Pepe, pues era así, *Pepe*, como todo el mundo le conocía, este humilde librillo está dedicado a ti.

En realidad, al principio de mi desempeño profesional yo no sabía que lo que yo sabía sobre lógica era *rara avis*. Ingenuo como soy, pensaba que todo buen informático dominaba sus misterios al menos igual que yo.

Pero poco a poco me di cuenta de que no, no todo el mundo en mi mundo sabía lo que yo sabía. Es más, me di cuenta de que en realidad pocos colegas sabían lo que yo sabía de la forma que lo sabía. Que yo era un caso raro, vaya.

Luego, mucho tiempo más tarde, hace sólo cuatro o cinco años, me ocurrió un *sucedido* que definitivamente me convenció de que mi acervo lógico era como era simplemente por lo bien estructurado que estaba desde el principio (mérito de Pepe Cuena, desde luego). Un compañero de trabajo, más joven que yo (cosa que no es muy difícil), pero ya con sus añitos, ante ciertos cambios drásticos en su vida decidió, entre otras cosas, comenzar la Carrera de Filosofía. Vocación tardía, pero intensa.

En Primero de Filosofía las asignaturas eran algo así como Historia Histérica de la Filosofía, Ética Rimbombante, Ontología Crepuscular, Epistemología de la Semántica Asintótica y otros arcanos similares (supongo que se nota mucho que yo, de Filosofía, entiendo más bien poco). Y **Lógica**.

Parece que la Lógica era (y seguramente sigue siendo) el *coco* de Primero en Filosofía. En realidad, a poco que lo pensemos, es lógico. En un sistema educativo como el español, los alumnos deciden cursar estudios de "Ciencias" o de "Letras" (se llamen como rayos se llamen ahora; en mis tiempos era así y, con matices, así sigue siendo), y esa decisión la han de tomar muy pronto, algo así como con catorce años o quince.

Disculpad que no sepa cómo se llaman ahora las diferentes etapas educativas españolas; tenemos aquí la sabia costumbre de cambiarlo todo, casi siempre para peor, cada tres o cuatro años, así que hace tiempo, desde que mi hija pasó por el proceso, que no sigo estos procelosos asuntos.

En los estudios de Ciencias se enseñan Matemáticas, Trigonometría, Física, Química y todas esas cositas; en los de Letras se da Literatura, Historia, Latín, Griego clásico, Filosofía, y cosas así. En los *currícula* de cada tipo de estudios hay alguna asignatura del otro tipo (por ejemplo, los de Ciencias dan un poco de Literatura y Filosofía, y los de Letras algo de Matemáticas, etc), pero por lo que he podido ver esas asignaturas "del lado oscuro" son consideradas como "*marías*", por lo que los conocimientos

de matemáticas que tienen los alumnos que llegan a Primero de Filosofía son, por decirlo de una forma caritativa, escasos.

Aclaro que en España llamamos “*marías*” a las asignaturas que, aunque haya que darlas y aprobarlas para pasar el curso, no son muy importantes para lo que se denomina “el tronco” del currículo. Por ejemplo, la Gimnasia, la Religión, la Educación para la Ciudadanía o como se llame ahora y cosas así son marías. A menudo tienen fama de ser asignaturas fáciles, aunque no siempre sea el caso.

Pero no es lo peor que sean escasos, es que además están… cómo lo diría… mal vistos. Si vas a ser filósofo (o juez, o historiador, o académico de la Real Academia de la Lengua, igual da), da la sensación de que cuanto menos sepas de álgebra o de cálculo diferencial, mejor. Y lo mismo pasa al revés, desde luego: si estudias física, o una ingeniería naval o de caminos, puentes y autopistas, o de lo que sea, está poco menos que prohibido que sepas una palabra de latín o griego clásico, o que sepas quién fue Ciro el Grande, Pedro el Cruel o el mismísimo Platón… Así nos va.

Volviendo a mi colega, el filósofo de tardía vocación… No recuerdo qué estudios tenía antes de decidirse a estudiar Filosofía, probablemente algunos de la rama de ciencias, pero en cualquier caso seguro que con el tiempo los tenía satisfactoriamente olvidados. Se encontró, obviamente, en un curso donde sus compañeros eran en su gran mayoría adolescentes recién salidos del Bachillerato, que habían cursado por la “rama de Letras” y que, por tanto, hacía tiempo que no veían en serio nada que tuviera ver con matemática de ningún tipo.

Cuando empezaron las clases en la asignatura de Lógica… fue el desparrame. Nadie entendía nada. Lo que allí se contaba parecía chino capuchino para todos, incluido mi colega. No tenían armas ni bagajes como para entender la asignatura y, desde luego (y conste que hablo de oídas, pero no creo equivocarme), el profesor tampoco ayudaba, con explicaciones seguramente muy “filosóficas” pero muy poco didácticas.

Primer examen parcial, al final del primer trimestre. Suspenso general, o casi. Incluyendo a mi amigo. Un desastre, vaya.

Conste aquí que mi opinión es que cuando nadie en una clase entera de varias decenas (¡o centenares!) de alumnos es capaz de aprobar la asignatura, la culpa es exclusivamente del profesor, y esto es extensivo a si sólo aprueban dos o tres: siempre hay fieras que se buscan la vida para aprender la asignatura como sea. Un tipo que, tras esforzarse en enseñar su asignatura, consigue semejante marca de suspensos, no merece dar clase ni en un parvulario. Y éste es un tipo de profesor que abunda muchísimo, sobre todo en la Universidad.

Pero lo peor de todo es que esta gente, ¡encima se jacta de que su asignatura es *taaan* difícil que no la aprueba nadie! Se pavonean: "Ja, ja… Mira qué duro soy y qué *importante* es mi asignatura, que sólo aprueban el 2% de mis estudiantes". Por favor...

¡¡**INÚTIL**, que eres un inútil, hombre ya!! A ver si te enteras de que **tú estás allí única y exclusivamente para enseñar a tus alumnos todo lo que sabes**, y nada más. Si no lo consigues, no estás haciendo tu trabajo, aquello por lo que te pagan. Por lo que *te pagamos*. Todos, pues de nuestros impuestos salen tus emolumentos. Pero no, claro, no le echan. En realidad, luego, en vez de echarle a patadas de la docencia, que es lo único que se merece, encima el tipo está casi siempre bien considerado por sus superiores. Así nos va, ya digo.

Me vuelvo a ir por las ramas… ya vuelvo, ya.

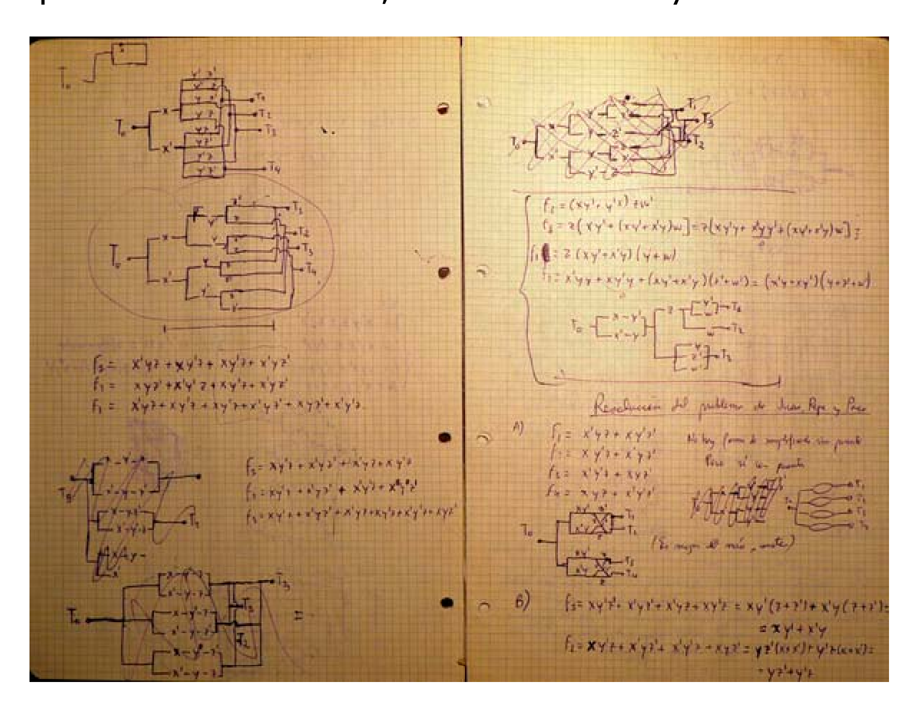
Bien, el caso es que tomando un café con mi colega, y tras comentar debidamente el tiempo y el resultado del partido de turno, le pregunté educadamente por su experiencia universitaria, y me dice: "*la Epistemología, bien; la Ética, muy bien; la Historia de la Filosofía, muy de hincar codos y aprendérsela de memoria… lo que me va fatal es la Lógica: ¡no entiendo nada!* ".

Yo me extraño: "*¿la Lógica? ¡Pero si es sencillísima!* ". Y él se extraña más: "*¿¿SENCILLÍSIMA?? ¿Tu café es alucinógeno, o qué? Pero si no la entendemos ni uno…*".

Evidentemente se trataba de una discusión completamente baladí. Por mucho que yo le contara y porfiara, agarrado a mi vasito de plástico con el brebaje que la máquina de la oficina hace pasar por café, que la Lógica formal era en realidad muy sencilla, no iba a convencerle a él, que la estaba sufriendo en sus carnes.

Se me ocurrió entonces una idea feliz (ya dije alguna vez que lo mío son las ideas felices): busqué en el desván mis semiapolillados apuntes de Lógica de Segundo, los fotocopié tal cual, y le pasé el tocho de fotocopias, disculpándome por mi mala letra, la que tenía entonces.

Aunque intentó pagarme las fotocopias, no se lo permití… bastante tenía el hombre con descifrar mis añejas cagadas de mosca. Aceptó las disculpas… de hecho me aseguró que mi letra es ahora mucho peor que hace casi cuarenta años, y tiene razón. En fin. Tampoco le di muchas más indicaciones: sólo los viejos apuntes manuscritos, emborronados y amarillentos.



Aprobó. Con notable alto. Parece que los apuntes corrieron como la pólvora entre sus colegas estudiantes. Y parece que el profesor casi se suicida cuando, al final del curso, tuvo que aprobar a la mayor parte de la clase. ¡Con lo bien que lo llevaba el buen hombre al acabar el primer trimestre, con prácticamente todos sus alumnos suspensos…!

Posteriormente charlamos, con otro café en la mano, al que esta vez invitó mi colega (aunque, eso sí, estaba igual de malo que

el primero) (el café, quiero decir), y me corroboró que, efectivamente, la Lógica es sencilla… siempre que se enseñara de la forma correcta, con la orientación correcta, y dando las bases apropiadas a los alumnos para ir comprendiendo lo que va viniendo a continuación.

El caso es que, conociendo cómo funciona la Universidad española, a mí no me extraña nada que en la Facultad de Filosofía siguieran contando la Lógica con silogismos y demás, como en el Siglo XVII, pero al menos estaba seguro de que en las carreras "de ciencias", y particularmente en las de ingeniería de informática, la enseñanza de Lógica formal (cuyo dominio es básico para poder ser un buen ingeniero informático, o al menos lo era), se haría con todos los predicamentos de calidad, al menos igual de bien como a mí me lo contaron cuarenta años ha.

¡Ja! Pues va a ser que no.

Mi hija, estudiante de ingeniería informática, me contó una anécdota lamentable cuando el profesor (o profesora, no recuerdo) de alguna asignatura sobre Lógica fue incapaz de explicar a la concurrencia por qué la implicación lógica tiene la fórmula que tiene… cosa que veremos con detalle dentro de unos cuantos capítulos.

Les venía a decir que "*esto es así porque es así… es como la suma, ¿por qué dos más dos son cuatro?, pues porque sí, es así, y punto*".

Y punto. Sí, sí, habéis leído bien: ¡¡¡¡**Y punto**!!!! Toma ya. ¡Nada menos que en tercero o cuarto de Carrera!

En fin.

Es completamente inadmisible que cualquier profesor universitario, y más en una asignatura que tiene que ver con la matemática, es más: ¡con la lógica!, diga que las cosas son así porque… ¡son así! En dos palabras: *Im…presionante.* Espero que Jesulín de Ubrique no me cobre derechos de autor por usar su mejor frase… Así nos va. Naturalmente, me senté con mi hija exactamente cinco minutos, le conté por qué la implicación lógica es como es (de veras: es una deducción completamente lógica), lo comprendió perfectamente… y se indignó porque toda una profesora universitaria que, se supone, se gana la vida enseñando

su asignatura, no fuera capaz de explicar algo tan sencillo. Repito: ¡Así nos va!

En definitiva, mi intención es ir repasando con vosotros, amables lectores, esos prodigiosos apuntes de *Metodología* (o sea, Lógica y adláteres) de mi Segundo Curso de Informática, impartidos hace cerca de cuarenta años por ese gran profesor y gran profesional que fue Don José Cuena Bartolomé.

No esperéis un curso completo de Lógica; para eso habrá que ir a alguna Universidad y aprenderla allí; más bien os contaré lo mismo que a mí me ha servido para ganarme la vida todos estos años. Y… *antes simplista que incomprensible*, siempre.

Pero… aviso, y el que avisa no es traidor: **Habrá fórmulas**. Fórmulas **matemáticas**. No una, ni dos. *Un puñao*. En ninguno de los párrafos anteriores dije que el libro se llamaría "*Lógica sin fórmulas*". Eso sí, aseguro que todas y cada unas de las fórmulas y pasos de cálculo que iremos viendo son sencillos, lógicos, casi inevitables en muchos casos.

No veréis más operaciones que sumas y multiplicaciones. No habrá integrales, ni derivadas, ni raíces cuadradas, ni series de Taylor, ni números imaginarios, ni numero *e*, ni *PI*, ni *ná* de *ná*. Con sólo los signos + y · (pues ni siquiera restar o dividir nos hará falta) nos apañaremos para descifrar cualquier intríngulis lógico que nos echen. En una palabra: **Creo que podréis seguir bien las fórmulas**. Si os ponéis a ello, claro.

Si os ponéis.

Y dicho esto, he de hacer igualmente una precisión: si sois lógicos, filósofos, matemáticos o, incluso, informáticos de carrera, igual esta forma de contar algo tan lógico como la Lógica os parece, cuando menos, *naïf*, ingenua, poco formal y escandalosamente simplista, incluso en algunos casos, errónea.

Quizá. Es más: Seguramente.

Hay que tener en cuenta que estoy contando una historia en buena parte olvidada basada en engorrinados apuntes de hace casi 40 años (y, diga lo que diga el tango, veinte años sí que son algo, y cuarenta… ¡mucho más!) de una carrera sobre una disciplina, la informática, que por entonces se estaba definiendo

día a día, y en la que la experiencia profesional de los profesores y su capacidad didáctica contaba mucho más que cátedras, programas, currícula y otros diversos rollos típicos de la excesivamente procedimentada Universidad actual…

Perdonad, pues, estas carencias evidentes del relato, todas ellas culpa mía y no de D. José Cuena, a cambio de poder observar por una mirilla algo sucedido 40 años atrás… es seguramente un raro privilegio que pocas veces se puede tener.

Aprovechadlo, pues, si gustáis.

Y como todas las cosas bien hechas, este libro sobre *Eso que llamamos Lógica* empieza, lógicamente, por el principio, por la base fundamental en que todo lo demás se asienta. El primer capítulo tratará, como no puede ser de otro modo, de lo que pasó aquel lejano primer día de clase. Tratará del **Álgebra de Boole**.

I- El Álgebra de Boole

Tras la breve (bueno, vale, no tan breve) introducción, hoy empezaré a destripar cómo es la Lógica por el principio, siguiendo los apuntes de la asignatura de Segundo de Carrera que impartió D. José Cuena allá por 1973… Y empezaré, como es lógico, por sus bases más fundamentales. Por lo que es imprescindible conocer para poder seguir el resto de capítulos y para poder razonar mínimamente. Por el Álgebra de Boole.

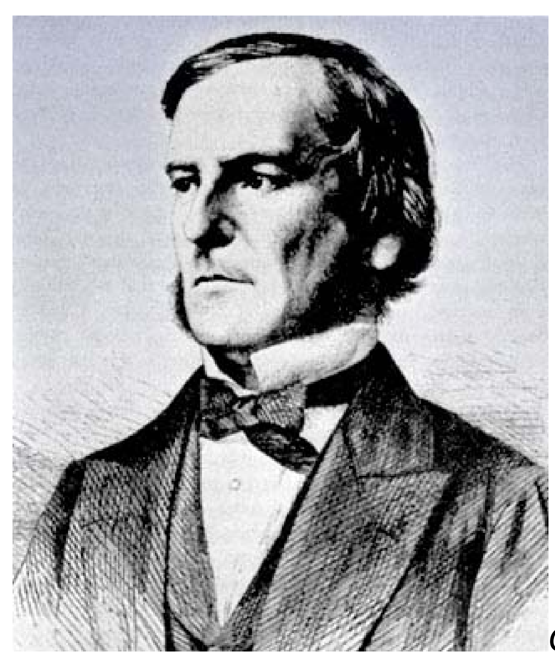
Primer día de clase. Octubre de 1973. A la hora en punto aparece el profesor de la asignatura (muy mal síntoma: el primer día y llegar puntual a la hora… ¿dónde se ha visto eso?) y se presenta: "*Soy José Cuena, y aunque el nombre de la asignatura sea 'Metodología', en realidad lo que yo voy a enseñarles a Vds. es Lógica*".

Pues vale, ningún problema. Total, sólo un par de horas antes se había presentado el profesor de otra asignatura de nombre "Informática Básica II", y nos dijo algo similar: "*Como no tengo ni idea de qué es lo que hay que dar en esta asignatura, yo les contaré de arriba abajo las tripas del ordenador que yo conozco, que a la sazón es el UNIVAC 1110*"…

Estábamos en 1973, se trataba de una Carrera nueva, los profesores, que también eran nuevos, eran todos, sin excepción, profesionales que trabajaban en las incipientes empresas informáticas de la época (IBM, Bull, NCR, UNIVAC, Iberia, RENFE, etc), y los temarios de las asignaturas se iban construyendo sobre la marcha.

Menuda diferencia con lo que pasa ahora, donde prácticamente ni uno solo de los profesores de las facultades de informática españolas ha trabajado jamás en la empresa privada…

Y sé muy bien que esta frase es injusta para algunos profesores, desgraciadamente pocos, que son la excepción que confirma la regla. Mis disculpas para todos ellos: eso es lo que tiene generalizar, que en ocasiones hace confundir churras con merinas…


George Boole.

El caso es que D. José (en realidad Pepe para todo el mundo), tras presentarse, comenzó inmediatamente a explicar el **Álgebra de Boole**, lo que fue el mal síntoma definitivo: ¿empezar a explicar la asignatura… *el primer día*? ¿Así, por las buenas? Eso sí que no se había visto nunca hasta entonces. Todos mis profesores de todos los cursos anteriores nos habían instruido acerca del axioma que reza: "*La primera clase no se da, y la última se perdona*". Pues resulta que no era un axioma, mire usted.

Rápidamente todos sacamos, nuestros cuadernos/folios/papeles de tomar apuntes muy aplicadamente, y comenzamos a copiar lo que nos iba explicando. ¿He dicho alguna vez que, en 1973, no había ni un solo libro que pudiéramos usar para estudiar una asignatura de informática? Pues lo digo.

Seguramente sí existían libros sobre ciertas disciplinas… ¡en inglés! O sea, como si fuese chino o arameo : el "idioma moderno" que estudió mi generación en el Colegio o en el Instituto era *français, bien sûr*. ¿Y el inglés? *Non, non, pas d'anglais*. El poco inglés que *yo* sabía lo aprendí en una Academia privada, en cursos de verano, obligado por mi madre (a quien nunca se lo agradeceré lo suficiente, pues mis preferencias iban más por holgazanear, jugar –mal- al fútbol e ir a hacer el burro a la piscina). Los demás, ni eso.

Como consecuencia, los apuntes tomados de las explicaciones de los profesores y sus gráficos y fórmulas escritos en la pizarra eran oro molido, casi el único medio de poder seguir y aprobar la asignatura.

Sí, en las pizarras, esas añejas pizarras hechas de auténtica pizarra, normalmente de color verde oscuro, en las que se escribía con tiza y se borraba con unos artilugios que, más que borrar, lo que hacían era esparcir los trazos de tiza, en forma de yeso pulverizado, por toda la clase. Todos mis recuerdos de mis años de estudiante están difuminados por una nube blanca de polvo de tiza…

Cedamos, pues, la palabra a Don José:

El Álgebra de Boole

Se trata de un sistema [*S*,+,·] compuesto de un conjunto (*S*), y dos operaciones definidas sobre él (+,·), en el que se verifican unas ciertas propiedades. Las operaciones deben ser cerradas, es decir, aplicadas a dos elementos pertenecientes a *S*, su resultado es otro elemento perteneciente a *S*.

Atención: aunque esto mismo lo repetiré varias veces a lo largo del libro, aviso aquí por primera vez que los signos (+,·) no representan la suma o la multiplicación tal como estamos acostumbrados. Tomémosles simplemente como un par de garabatos que representan un par de operaciones que se aplican a los elementos del conjunto S, y ya veremos cómo se comportan.

Las propiedades del conjunto se definen exclusivamente mediante unos ciertos axiomas de entrada; una vez definidos estos axiomas, todos los teoremas resultantes serán demostrados a partir de ellos.

Los axiomas del álgebra de Boole fueron postulados por Edward Vermyle Huntington en 1904. Como sabréis, un axioma es un postulado indemostrable, que se toma como cierto siempre y en toda ocasión y que sirve de base para cualquier demostración posterior de un determinado teorema. Así como los axiomas de Peano son la base formal de la aritmética, del mismo modo los de Huntington son la base del álgebra de Boole.

Y estos axiomas de Huntington son solamente cuatro, aunque, como son duales, como veremos en un momento, podríamos decir que en realidad son ocho.

Unos años más tarde, en 1933, Huntington revisó esos axiomas, simplificándolos, pero Pepe Cuena nos contó los de 1904 y esos son también los que voy a contar yo aquí a continuación.

Axiomas de Huntington (1904)

Axioma 1: Ambas operaciones son conmutativas (Ley conmutativa).

$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$

Axioma 2: Ambas operaciones, (+,·), tienen un elemento neutro.

$a+0 = 0+a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Axioma 3: Ambas operaciones son distributivas respecto de la otra operación (Ley distributiva).

$a \cdot (b+c) = a \cdot b+a \cdot c$ $(b+c) \cdot a = b \cdot a+c \cdot a$	$a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$ $(b \cdot c)+a = (b+a) \cdot (c+a)$

Axioma 4: Para cada elemento existe su complementario.

Todo elemento *a* perteneciente a S tiene un complementario *a'*, también perteneciente a S, tal que:

$a+a' = 1$	$a \cdot a' = 0$

Y esto es todo, amigos.

Aviso para navegantes: Si habéis detectado algo *raro*... eso no es nada. Esperad y ved.

Bien, **esto es todo lo que necesitamos para definir un álgebra de Boole** (y para que los informáticos podamos ganarnos la vida: nunca estaremos lo bastante agradecidos a Mr. Boole y a Mr. Huntington). No hace falta nada más.

Si nos fijamos bien, vemos que el conjunto de propiedades definidas por los axiomas se dividen en dos subconjuntos simétricos, pues el lado izquierdo es idéntico al lado derecho tras una simple transformación, cambiando + por · y viceversa, y cambiando 0 por 1 y viceversa. Entonces, usando exclusivamente estos axiomas, comenzaremos a demostrar una serie de teoremas que nos harán la vida más fácil en el futuro.

En cada transformación que hagamos en las fórmulas identificaremos debido a qué axioma concreto podemos hacer esa transformación, marcando el número de Axioma utilizado (A1, A2, A3 o A4) y de qué lado (Izquierdo o Derecho).

Comencemos.

Teoremas básicos

Teorema 1: Idempotencia. **a+a = a; a·a = a**

a+a = a		**a·a = a**	
a = a+0 =	A2 Izq.	a = a·1 =	A2 Der.
a+(a·a’) =	A4 Der.	a·(a+a’) =	A4 Izq.
(a+a)·(a+a’) =	A3 Der.	(a·a)+(a·a’) =	A3 Izq.
(a+a)·1 =	A4 Izq.	(a·a)+0 =	A4 Der.
(a+a)	A2 Der.	(a·a)	A2 Izq.

Teorema 2: **a+1 = 1; a·0 = 0**

a+1 = 1		**a·0 = 0**	
1 = a+a’ =	A4 Izq.	0 = a·a’ =	A4 Der.
a+(a’·1) =	A2 Der.	a·(a’+0) =	A2 Izq.
(a+a’)·(a+1) =	A3 Der.	(a·a’)+(a·0) =	A3 Izq.
1·(a+1) =	A4 Izq.	0+(a·0) =	A4 Der.
a+1	A2 Der.	a·0	A2 Izq.

Teorema 3: Ley de absorción.

a+(a·b) = a; a·(a+b) = a

Para demostrar este teorema usaremos no sólo los cuatro axiomas iniciales, sino también el recién demostrado Teorema 2, cosa que podemos hacer porque ya hemos demostrado dicho Teorema 2 a partir de los axiomas del álgebra.

De aquí en adelante, siempre que use un teorema ya demostrado, lo marcaré como T*x* en vez de A*x*, indicando como siempre si se usa su parte izquierda o su parte derecha.

a+(a·b) = a		**a·(a+b) = a**	
a+(a·b) = (a·1)+(a·b) =	A2 Der.	a·(a+b) = (a+0)·(a+b) =	A2 Izq.
a·(1+b) =	A3 Izq.	a+(0·b) =	A3 Der.
a·1 =	T2 Izq.	a+0 =	T2 Der.
a	A2 Der.	a	A2 Izq.

Teorema 4: Propiedad asociativa.

a+(b+c) = (a+b)+c;   a·(b·c) = (a·b)·c

Para demostrar este teorema es preciso demostrar antes dos lemas independientes.

Lema 1:

a·(a+(b+c)) = a·((a+b)+c)		**a+(a·(b·c)) = a+((a·b)·c)**	
a·(a+(b+c)) = a =	T3 Der.	a+(a·(b·c)) = a =	T3 Izq.
a+(a·c) =	T3 Izq.	a·(a+c) =	T3 Der.
(a·(a+b))+(a·c) =	T3 Der.	(a+a·b)·(a+c) =	T3 Izq.
a·((a+b)+c)	A3 Izq.	a+((a·b)·c)	A3 Der.

Lema 2:

a’·(a+(b+c)) = a’·((a+b)+c)		a’+(a·(b·c)) = a’+((a.b)·c)	
a’·(a+(b+c))=(a’·a)+(a’·(b+c)) =	A3 Izq.	a’+(a·(b·c))=(a’+a)·(a’+(b·c))=	A3 Der.
0+(a’·(b+c)) =	A4 Der.	1·(a’+(b·c)) =	A4 Izq.
a’·(b+c) =	A2 Izq.	a’+(b·c) =	A2 Der.
(a’·b)+(a’·c) =	A3 Izq.	(a’+b)·(a’+c) =	A3 Der.
(0+(a’·b))+(a’·c) =	A2 Izq.	(1·(a’+b))·(a’+c) =	A2 Der.
((a’·a)+(a’·b))+(a’·c) =	A4 Der.	((a’+a)·(a’+b))·(a’+c) =	A4 Izq.
(a’·(a+b))+(a’·c) =	A3 Izq.	(a’+(a·b))·(a’+c) =	A3 Der.
a’·((a+b)+c)	A3 Izq.	a’+((a·b)·c)	A3 Der.

Bien: teniendo convenientemente demostrados ambos lemas, ahora aplicamos a cada lado respectivamente las operaciones "+" y "·" (que, ojo, no tenemos por qué saber que se llaman "*suma*" o "*multiplicación*") miembro a miembro, el primer miembro de ambos lemas por un lado, y el segundo, por el otro. Ambas ecuaciones serán iguales, pues aplican la misma operación "+" o "·" a los dos lados de la igualdad.

Para que quede claro: si tenemos dos igualdades (los dos lemas) que son, por ejemplo, a=b y c=d, evidentemente es cierto que se cumple a·c=b·d, y por supuesto ocurre lo mismo con el signo +: a+c=b+d.

Exactamente eso es lo que haremos ahora.

Lema 1: a·(a+(b+c)) = a·((a+b)+c)		Lema 1: a+(a·(b·c)) = a+((a.b)·c)	
Lema 2: a’·(a+(b+c)) = a’·((a+b)+c)		Lema 2: a’+(a·(b·c)) = a’+((a.b)·c)	
Lado izquierdo		*Lado izquierdo*	
[a·(a+(b+c))]+[a’·(a+(b+c))] =		[a+(a·(b·c))]·[a’+(a·(b·c))] =	
(a+a’)·(a+(b+c)) =	A3 Izq.	(a·a’)+(a·(b·c)) =	A3 Der.
1·(a+(b+c)) =	A4 Izq.	0+(a·(b·c)) =	A4 Der.
a+(b+c)	A2 Der.	a·(b·c)	A2 Izq.
Lado derecho		*Lado derecho*	
[a·((a+b)+c)]+[a’·((a+b)+c)] =		[a+((a·b)·c)]·[a’+((a·b)·c)] =	
(a+a’)·((a+b)+c)) =	A3 Izq.	(a·a’)+((a·b)·c)) =	A3 Der.
1·((a+b)+c) =	A4 Izq.	0+((a·b)·c) =	A4 Der.
(a+b)+c	A2 Der.	(a·b)·c	A2 Izq.
Igualando ambos lados:		Igualando ambos lados:	
a+(b+c) = (a+b)+c		a·(b·c) = (a·b)·c	

Nota de Macluskey en 2012: Sinceramente, nunca pensé que costara tanto definir algo tan obvio como la propiedad asociativa... para que veáis lo que cuesta establecer las bases formales de cualquier disciplina.

Teorema 5: Para cada elemento a de S existe un complementario a’ y sólo uno.

Atención: Este teorema no dice lo mismo que el axioma A4, aunque en una visión apresurada podría parecerlo. Allí establecíamos que existe *la noción* de complementario, es decir, que cada elemento de S tiene elementos complementarios, *al menos uno*, mientras que este Teorema 5 afirma que el complementario de cada elemento de S es *uno y sólo uno*, exactamente uno y ni más ni menos que uno. O sea: uno.

Supongamos que existieran dos complementarios de a, por ejemplo *x* e *y*. Se cumplirían las siguientes 4 ecuaciones:

Por x complementario de a:		Por y complementario de a:	
1) a+x = 1	A4 Izq.	3) a+y = 1	A4 Izq.
2) a·x = 0	A4 Der.	4) a·y = 0	A4 Der.

x=1·x =	A2 Der.
(a+y)·x =	(3)
(a·x)+(y·x) =	A3 Izq.
0+(y·x) =	(2)
(a·y)+(y·x) =	(4)
(y·a)+(y·x) =	A1 Der.
y·(a+x) =	A3 Izq.
y·1 =	(1)
y	A2 Der.
Luego ambos complementarios, x e y, son iguales.	
Por tanto hay un único complementario de a, que es a’.	

Teorema 6: El complementario del complementario de un elemento a de S es igual al propio a.

Es decir: **(a’)’=a**

Sabemos por el Axioma 2 que: a’+a=1 y también que a’·a=0. Suponiendo que (a’)’=x, ocurrirá que: a’+x=1, y a’·x=0, dado que ese x es el complementario de a’. Igualando los unos y los ceros de ambas ecuaciones (de éstas y de las de arriba) tenemos que: a’+a = a’+x, y que a’·a = a’·x; el único valor que cumple ambas ecuaciones es x=a, luego a es el complementario del complementario de a.

Y no es un trabalenguas, que conste.

Teorema 7: Los dos términos neutros de las dos operaciones +,· son complementarios entre sí, es decir: **0'=1 y 1'=0**

Según el Axioma 2: a+a'=1 y a·a'=0.

Suponiendo a=0, queda 0+a'=1; luego a'=1; por tanto **0'=1**

Suponiendo a=1, queda 1.a'=0; luego a'=0; por tanto **1'=0**

Teorema 8: Leyes de De Morgan.

(a+b)' = a'·b' ; (a·b)' = a'+b'

Los informáticos usamos muy a menudo las leyes de De Morgan para simplificar una fórmula lógica. O, al menos en mis tiempos, las usábamos a menudo...

He aquí su demostración:

(a+b)’ = a’·b’		**(a·b)’ = a’+b’**	
Sea x = (a+b)’ Entonces:		Sea x = (a·b)’ Entonces:	
1) (a+b)·x=0 y	A4 Der.	1) (a·b)·x=0 y	A4 Der.
2) (a+b)+x=1	A4 Izq.	2) (a·b)+x=1	A4 Izq.
Probamos x=(a’·b’) en 1):		Probamos x=(a’+b’) en 1):	
(a+b)·(a’·b’) =		(a·b)·(a’+b’) =	
(a·a’·b’)+(b·a’·b’) =	A3 Izq.	(a·b·a’)+(a·b·b’) =	A3 Izq.
(a·a’·b’)+(b·b’·a’) =	A1 Der.	(a·a’·b)+(b·b’·a) =	A1 Der.
(0·b’)+(0·a’) =	A4 Der.	(0·b)+(0·a) =	A4 Der.
0+0 =	T2 Der.	0+0 =	T2 Der.
0	T1 Izq.	0	T1 Izq.
Probamos x=a’·b’ en 2):		Probamos x=(a’+b’) en 2):	
(a+b)+(a’·b’) =		(a·b)+(a’+b’) =	
a+(b+(a’·b’)) =	T4 Izq.	(a’+b’)+(a·b) =	A1 Izq.
a+(b+a’)·(b+b’) =	A3 Der.	a’+(b’+(a·b)) =	T4 Izq.
a+(b+a’)·1 =	A4 Izq.	a’+(b’+a)·(b’+b) =	A3 Der.
a+b+a’ =	A2 Der.	a’+(b’+a)·1 =	A4 Izq.
a+a’+b =	A1 Izq.	a’+b’+a =	A2 Der.
1+b =	A4 Izq.	a’+a+b’ =	A1 Izq.
1	T2 Izq.	1+b’ =	A4 Izq.
		1	T2 Izq.
Luego x = (a+b)’ = a’·b’	T5	Luego x = (ab)’ = a’+b’	T5

En fin: al llegar a este punto, Don José miró satisfecho la pizarra toda llenita de fórmulas, miró el reloj y nos dijo: "*Hasta la semana que viene. Buenos días.*", y se fue rápidamente, dejándonos hechos un auténtico lío, mirando incrédulos las tres páginas escasas de apuntes donde, aunque nosotros no lo sabíamos, acababa de plantar los mejores cimientos sobre los que construir nuestra futura vida profesional.

No entendíamos casi nada, claro, porque, consecuencia de no-sé-cuántos años de estudios reglados de *matemáticas-como-Dios-manda*, no podíamos evitar ver el signo "+" como una suma, y el signo "·" como un producto, por mucho que hubiéramos sido advertidos… y aquel amasijo de fórmulas no tenía el menor sentido.

Lo de que a+0=a lo veíamos claro y nos parecía muy bien y muy lógico, y lo de que a·1=a, también, pero… ¿Cómo que ***1+a=1***? ¿Qué es eso de que ***a+a=a***? ¿No será *2a*, como toda la vida…? ¿Y, para más escarnio, cómo es que de pronto existe la propiedad distributiva de la suma respecto de la multiplicación? ¡Y como axioma, nada menos!

El caso es que nadie interrumpió a Don José ese día. Nos limitamos a tomar apuntes como si nos los hubiera dictado un extraterrestre… y a un extraterrestre no se le discute cuando te cuenta su conocimiento superior, y menos aún en la época de Franco.

Yo me fui a mi casa. Repasé los apuntes. Tres veces (ya digo, hasta aquí son sólo tres páginas escasas). Nada. Al día siguiente, en lugar de ir a la sacrosanta cafetería en los descansos entre clases, nos quedamos unos pocos recalcitrantes para descifrar aquello… Y al día siguiente… Y de pronto a alguien (creo que fue a mí, que siempre he sido muy listo… ejem, pero no estoy seguro) se le ocurrió proponer: "*Oye, digo yo… ¿y si cambiamos el + por la Unión de Conjuntos y el · por la Intersección…? ¿Qué pasaría?*"…

Pues lo que pasó es que de pronto, instantáneamente, se nos hizo la luz a todos. Evidentemente, naturalmente, ciertamente… todo tenía sentido entonces.

Tengo que decir aquí que todos nosotros habíamos estudiado "Conjuntos" en el Bachillerato, como *una cosa nueva* que se había incorporado recientemente al currículum y que no se sabía muy bien para qué servía. Así eran las cosas en aquella España… El caso es que todos conocíamos el rollo ése de los conjuntos, las uniones y las intersecciones y tal, aunque nadie sabía para qué servía, y entonces todo nos cuadró. Ahora sí que tenía sentido que algo "Unión" el conjunto universal diera siempre el conjunto universal. Etc, etc.

En aquel momento nos acordamos de los ancestros de Don José Cuena, por no habernos puesto en la pista y facilitarnos la vida… Pero haciéndolo de esta forma nos hizo pensar, razonar y buscar analogías hasta comprender todo el asunto. No sólo nos enseñó lógica: **nos enseñó a pensar**. ¡Menudo era Don José!

Y uno se ha tirado toda su vida pensando, analizando, criticando… no sé si me ha servido de mucho, pero, qué le vamos a hacer, no voy a cambiar a estas alturas.

Ha sido éste un capítulo denso. Muy denso. Pero **en él están las bases de toda la Lógica** y de mucho más.

No es necesario que lo aprendáis de memoria, creo yo, sino más bien tenerlo de referencia para cuando haga falta. Si el capítulo es en definitiva un rollo soberano, es mi culpa. Pero si ha resultado un buen capítulo, quizá excepcional, no es mérito mío, pues me he limitado a descifrar mis viejos apuntes y ponerlos en un formato inteligible… ¡Y **eso** sí que ha tenido mérito!

A partir de aquí seguiremos escuchando, vía el túnel del tiempo, a Pepe Cuena en 1973, enseñándonos a seguir pensando.

II- La Forma Normal Disyuntiva en el Álgebra de Boole

En el espeso y lleno de formulas, aunque tremendamente didáctico (espero), capítulo anterior de este libro dedicado a algo parecido a la lógica, vimos cómo en dos patadas Don José Cuena se despachó toda la definición del Álgebra de Boole.

Al día siguiente (en realidad a la semana siguiente, porque las clases eran semanales, de dos horas cada una), a mediados de octubre de 1973, nuestro profesor apareció, nuevamente a la hora en punto, para seguir iluminándonos.

Sigamos con él, pues.

Bien, lo que Don José nos contó ese día fue cómo se definía una determinada relación en el álgebra de Boole, introduciendo para ello el signo $\leq$, que relaciona dos elementos del conjunto S.

Evidentemente, esa relación se llama "*Menor o igual que*", hasta ahí podíamos llegar…

En un álgebra de Boole se puede definir esta relación mediante la siguiente ecuación:

$$a \leq b \Longrightarrow a \cdot b' = 0$$

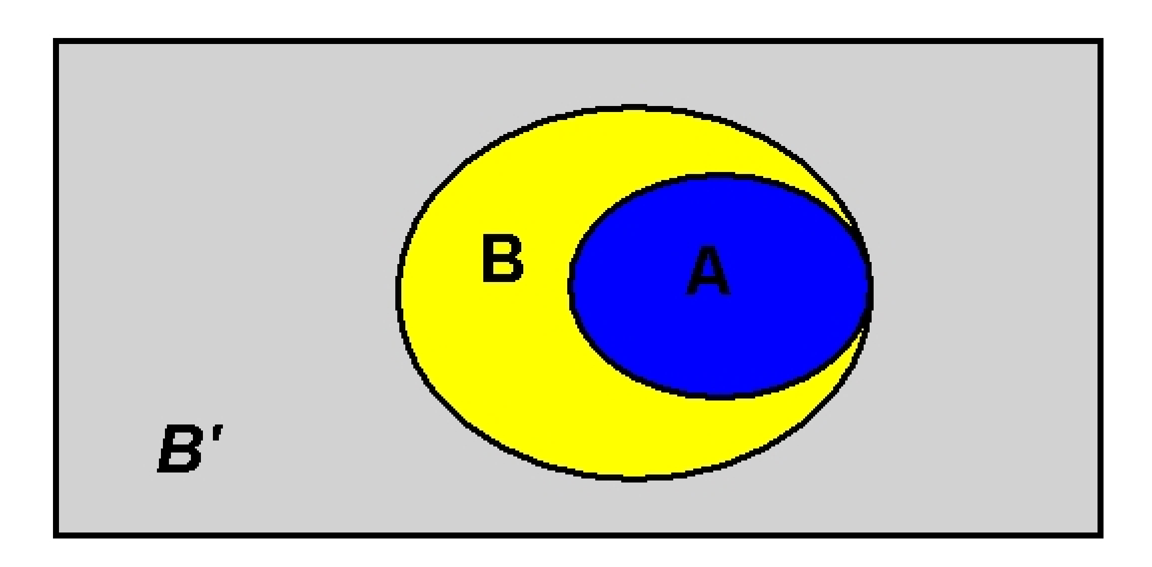
Como ya nos habíamos dado cuenta los de clase, o al menos la mayoría, que para algo el descubrimiento de la semana pasada había corrido como la pólvora, de que el álgebra de Boole era la que regulaba la Teoría de Conjuntos, rápidamente nos dimos cuenta de que la relación $\leq$ en conjuntos era exactamente la relación "*Contiene*" que estudiamos en dicha teoría.

Mejor dicho, puesto que aquí es "menor o igual que" y no "mayor o igual que", en realidad se trata de la relación "*Es Contenido por*".

Y claro, a partir de aquí todo fue coser y cantar. Si el conjunto A es contenido por B, esto implica que la intersección de A y el complementario de B es el conjunto vacío… ergo $a \leq b$ implica que $a \cdot b' = 0$.

Naturalmente. Evidentemente. Claro. ¡Qué tontería!

En la figura siguiente queda claro. B contiene a A, así que A es menor o igual que B, es decir, $A \leq B$. Por tanto, la intersección de A (el conjunto azul) con B' (la zona gris clarita), que es el complementario de B (la parte amarilla), es el conjunto vacío, pues no tienen ningún elemento en común, luego es evidente que $A \cdot B' = 0$.



Toda la clase estuvo dedicada a demostrar las diferentes propiedades de tal relación, en demostrar que es una relación de orden, y, dentro de las de orden, de "orden *parcial*", puesto que la relación "Menor o Igual" no abarca a todos los elementos del conjunto S.

Por muy intimidante que parezca el párrafo anterior, en realidad es una tontería, es muy sencillo de entender: La relación $\leq$ en los números naturales o en los reales, por ejemplo, es de orden *total*: cada uno de todos los números es o menor o mayor (o igual) que todos los demás, pero tratando, por ejemplo, con conjuntos no tiene por qué ser así: pueden existir conjuntos que ni contienen ni son contenidos por otros conjuntos.

El ejemplo más claro es lo que ocurre entre un conjunto y su complementario, por ejemplo, "los españoles" con "los extranjeros (los no españoles, vaya)": ninguno de los dos conjuntos contiene al otro, es más, es que en ese caso no comparten ni uno sólo de sus elementos.

Como toda buena relación de orden, cumple con las tres conocidas propiedades: es **Reflexiva** (es decir, $A \leq A$, pues todo elemento es menor o igual que sí mismo, en este caso *estrictamente igual*) es **Transitiva** (lo que quiere decir que si $A \leq B$ y $B \leq C$, entonces $A \leq C$, cosa que es bastante evidente), y es **Antisimétrica** (es decir, que si $A \leq B$ y simultáneamente $B \leq A$, entonces necesariamente $A = B$, lo que es también sencillo de entender).

En realidad, como supongo os habéis dado cuenta, la cosa funciona al revés: **como en esta relación "≤" se cumplen las tres propiedades, entonces la relación "≤" es de orden**. Ahora sí.

Esta relación "Menor o igual que", como consecuencia de ser una relación de orden, cumple un par de propiedades adicionales:

Por un lado, si $x \leq y$ entonces $x \leq y + z$.

Y por el otro, si $x \leq y$ entonces $y' \leq x'$.

No voy a demostrar estas fórmulas: no son muy complicadas, por no decir que son *intuitivas*. Pensando en conjuntos se ve muy fácilmente: si x está contenido en y, también estará contenido en la Unión de y con cualquier otra cosa; y si x está contenido en y, entonces los complementarios cumplan la relación opuesta: el complementario de y está contenido en el de x. Muy evidente, como veis.

Quedémonos finalmente con esto: **la relación "≤" en un álgebra de Boole es de orden parcial**, y con eso nos sirve.

Le íbamos cogiendo el tranquillo a esto de la Lógica…

Siguiente día, siguiente semana. Hora en punto, nuevamente. Esto ya se está convirtiendo en todo un síntoma… Hoy D. José nos hablará de **La Forma Normal Disyuntiva** de las expresiones (funciones) en un álgebra de Boole.

Mmmm. La… ¿*qué*? Sí, la Forma Normal Disyuntiva, ¿qué pasa? Será algo importantísimo para lo que sigue más adelante, así que hagamos menos chiribitas con los ojos, y vayamos al grano.

Primero habrá que definir qué es una **función booleana**. Toda aplicación de $S^n en S$ que venga dada por una expresión en álgebra de Boole es una función booleana. Fácil, ¿no?

…

Venga, que es sencillo: dado que las dos operaciones definidas para el álgebra (+,·) son cerradas, es decir, que aplicadas a dos elementos de S dan como resultado otro elemento de S, el resultado de toda función *f(x,y,z,…)* expresada en álgebra booleana también pertenece a S.

…

Bueno, vale, ya voy.

Sea, por ejemplo, la siguiente función definida en un sistema que obedece al álgebra de Boole:

$f(x, y, z) = (x' \cdot (y + z)) + (z' \cdot (y' + x))$, .

Como tanto *x* como *y* como *z* son elementos de S (y, por tanto, sus complementarios también lo son), cualquier operación (+,·) realizada sobre ellos (y entre ellos) y sus complementarios dará obligatoriamente un resultado que será también un elemento de S.

Truco: Pensad nuevamente en conjuntos y lo veréis claro. Dados varios conjuntos cualesquiera y unidos e intersecados entre sí y sus complementarios como nos venga en gana, el resultado será siempre… sí, otro conjunto. Eso es una aplicación de $S^n en S$.

Teóricamente, las expresiones del álgebra de Boole podrían llevar constantes; de hecho hay dos constantes "de oficio": los dos elementos neutros, 0 y 1. Pero las constantes en el sentido algebraico habitual no tienen mucho sentido. ¿Qué sería 6a, por ejemplo? Pues a, claro, dado que 6a=a+a+a+a+a+a. Y como sabemos que a+a=a, entonces 6a=a, obviamente. ¿Y qué sería $(a + b)^2$, entonces? Pues (a+b), naturalmente, dado que (a+b)·(a+b)=(a+b). En definitiva, nunca aparecerán constantes en las expresiones que usaremos aquí (ni en las que usaremos normalmente en nuestra vida cotidiana de relación con el álgebra de Boole).

Como diría Forrest Gump: "*Mejor, ¡una cosa menos!*".

Pues bien, si tenemos una función booleana cualquiera en la que no aparecen constantes, ($f(x,y,z) = (x' \cdot (y+z)' + x) \cdot (x' + (y \cdot z))'$, por ejemplo), entonces dicha función se puede representar como una suma de productos P_i, tales que:

1) En todo término P_i aparecen reflejadas todas las variables que aparecen en la fórmula original (bien complementadas, bien sin complementar).

2) Todos los productos P_i son distintos entre sí.

Cabe decir aquí que a partir de ahora haré lo mismo que Don José hizo hace casi cuarenta años, simplificando la notación de las fórmulas de la misma manera que lo hacemos en el "álgebra normal", la numérica: no escribiendo el signo "·", salvo en los casos donde su uso sea preciso para hacer más descriptiva la fórmula.

Es decir, la fórmula del ejemplo de arriba (y todas las demás) la escribiré preferentemente a partir de ahora del siguiente modo:

$$f(x,y,z) = (x'(y+z)' + x)(x' + (yz))'$$

Se entiende, ¿no? Pero recordad que **"+" no es "suma" ni "·" es "multiplicación" en el sentido numérico habitual, sino que son "sumas booleanas" o "productos booleanos"**, que ya veremos cómo se definen en según que sistemas… En conjuntos, por ejemplo, "+" es "Unión y "·" es "Intersección", como ya sabéis. En otros sistemas, serán… otras cosas… Paciencia.

Volviendo a la afirmación de hace un ratito (eso de que toda función se puede descomponer en sumas de productos), veremos cómo se llega a esto, procediendo a la reducción sistemática de las expresiones en tres pasos:

Paso 1: Quitar sistemáticamente toda complementación a fórmulas entre paréntesis. Para ello usaremos extensivamente las Leyes de De Morgan. Éstas fueron demostradas en el Teorema 8 que vimos en el capítulo anterior.

Y no, no son las Leyes "de Morgan", como las llama casi todo el mundo que habla en español, sino Leyes de *De Morgan*, puesto que son debidas al matemático indio-británico Augustus De Morgan

Por ejemplo, si tenemos $(a+b)' \cdot (cd)'$, quedaría, aplicando la Ley de De Morgan, $a'b' \cdot (c'+d')$.

Al final de este paso sólo están complementadas las variables individuales, no operaciones con ellas.

Paso 2: Quitar sistemáticamente el signo "·" entre paréntesis, aplicando la propiedad distributiva. Así, $a(b+c)$ quedaría $ab+ac$.

Por ejemplo, $(x+z)(y+w)$ quedaría $xy+xw+zy+zw$.

En realidad, ése es el resultado final, tras dos pasos. El primero de ellos dejaría $(x+z)y+(x+z)w$, y en un segundo paso quedaría $xy+zy+xw+zw$; reordenando los términos queda la fórmula del texto.

Por supuesto, si algún término tiene simultáneamente una variable *x* y su complementaria, *x'*, al estar ambas multiplicándose entre sí, el resultado de esta multiplicación (xx') es cero, por lo que podemos eliminar sin pudor alguno el término completo. Así, si, por ejemplo, resultara un término $xyy'z'$, al ser $yy'=0$, queda $xz'\dot{0}$, y podemos eliminar el término completo, pues sabemos que $a \cdot 0 = 0$. Además, si quedan dos o más términos exactamente iguales, se pueden eliminar todos menos uno, puesto que sabemos también que $a+a=a$.

Bien, ahora tenemos ya la expresión reducida a una suma de productos distintos… pero no es suficiente, porque es posible que no en todos los productos estén representadas todas las variables, lo que era uno de los requisitos iniciales.

De hecho, en el ejemplo anterior son 4 las variables y ningún término tiene más que dos… Hay que hacer algo para que *todos* los términos tengan *todas* las variables, bien complementadas, bien sin complementar, que era el requisito previo, si os acordáis.

Para solucionarlo:

Paso 3: Multiplicar los términos a los que les falte alguna variable x por (x+x'), que, como es igual a 1, no cambia el resultado.

Por ejemplo, si son tres las variables de una cierta función *f(x,y,z)*, y tenemos un término *xy'* (sin *z*), entonces éste se multiplica por *(z+z')*, quedando entonces $xy'(z+z') = xy'z + xy'z'$.

Nuevamente, si como consecuencia de todas estas operaciones resultan dos o más términos iguales, se eliminan todos ellos menos uno, debido a la consabida idempotencia: $a + a = a$

En fin, tras la aplicación secuencial de estos tres pasos tenemos la misma fórmula original, bien masajeada, vale, pero la misma original, expresada de la forma pedida.

A esta forma de organizar las fórmulas booleanas se le denomina **Forma Normal Disyuntiva** (FND), y veremos que nos será de gran utilidad más adelante… y hasta aquí puedo contar de momento.

Veamos un ejemplo: Sea $f(x,y,z) = (x+y+z)(xy+x'z)'$. Con tres variables, como podemos ver: *x*,*y*,*z*. ¿Cuál es su Forma Normal Disyuntiva?

Aconsejo a los que os interese todo esto que intentéis realizar el proceso vosotros solos, tenéis conocimientos y argumentos más que suficientes para hacerlo… y es fácil.

Según el *paso 1*, se eliminan los complementos en paréntesis (por Ley de De Morgan).

$f(x,y,z) = (x+y+z)(xy+x'z)'$ queda, en primer lugar,

$(x+y+z)[(xy)'(x'z)']$, que a su vez queda

$(x+y+z)[(x'+y')(x+z')]$. Reordenando los productos (gracias a la propiedad conmutativa) queda, por fin:

$(x+y+z)(x+z')(x'+y')$.

Ahora aplicamos la distributiva (*paso 2*). Primero, sacamos en los dos primeros términos como sumando común a x (mira que resulta raro lo de sacar "sumando común"… más vale acostumbrarse), y entonces queda:

$[x + (y + z)z'] \cdot (x' + y')$. Ahora aplicamos de nuevo la distributiva en el primer paréntesis, y queda:

$(x + yz' + zz')(x' + y')$; *zz'* es cero, así que lo eliminamos, y queda:

$(x + yz')(x' + y')$. Otra vez la distributiva, y queda:

$x(x' + y') + yz'(x' + y')$, y otra vez más y queda, finalmente:

$xx' + xy' + x'yz' + yy'z'$.

Como *xx'* es igual a cero, lo mismo que *yy'*, queda finalmente: $xy' + x'yz'$.

¿Ya está? Pues no, aún queda el último paso.

Uno de los dos términos *(xy')* no tiene la variable z, así que lo multiplicamos por *(z+z')*, que es, obviamente, 1 (*paso 3*), y tenemos que la fórmula original, ésa tan fea de ahí arriba, es equivalente a $xy'z + xy'z' + x'yz'$, mucho más bonita, dónde va a parar, que ya está en Forma Normal Disyuntiva.

Si os lo estabais preguntando, sí, efectivamente, **también hay una *Forma Normal Conjuntiva***, que es parecida a la FND, pero sustituyendo los + por · y viceversa, así que lo que resulta es un producto de términos tal que cada uno de ellos es una suma que contiene todas las variables, complementadas o no, en vez de una suma de productos…

La demostración es idéntica, en realidad, a la de la Forma Normal Disyuntiva, cambiando, en los pasos 2 y 3, el 1 por el 0 y el + por el ·, y viceversa. Ya lo sabéis: todo en álgebra de Boole es dual.

Podríamos ahora definir una **Forma Normal Disyuntiva *Completa***, que es, para *n* variables, la suma de todos los productos posibles de esas *n* variables complementadas y sin complementar, que, como es fácil comprobar, son en total 2^n : las permutaciones de 2 elementos (los dos estados: complementado-sin complementar) tomados de *n* en *n*.

Se demuestra fácilmente que esta Forma Normal Disyuntiva Completa es igual a la unidad (a 1, en realidad: es algo muy intuitivo, yo no voy a hacerlo aquí).

Por otra parte, se demuestra también fácilmente que, suponiendo como conjunto de valores posibles sólo 0 y 1, y dando a las variables valores arbitrarios entre estos valores 0 ó 1, en la Forma Normal Disyuntiva Completa sólo habrá un único término que valdrá 1 y todos los demás, 0 (y su suma, 1, claro, al sumar muchos ceros y un único 1).

Esto es así porque para que un término (producto) cualquiera valga 1 en estas condiciones, todas las variables que lo componen tienen que valer 1, por lo que habrá sólo una combinación plausible: cualquier otra combinación variará en al menos un valor de una variable, que será entonces 0 y anulará al término completo, al estar esa variable que es igual a cero multiplicando al resto.

Y lo mismo ocurre con la Forma Normal Conjuntiva, pero al revés, claro: la Forma Normal Conjuntiva Completa será siempre cero, por los mismos argumentos, aunque cambiando el 0 por el 1 y la suma por la multiplicación, y viceversa. Ah, la dualidad, siempre la dualidad en el álgebra de Boole.

Un pequeño ejemplo para fijar las ideas (recordad que en este caso concreto los valores permitidos de las variables sólo pueden ser 0 y 1):

Mirando la Forma Normal Disyuntiva Completa de un conjunto de tres variables, *x*,*y*,*z*, uno de los términos que la forman es, necesariamente, $xy'z$.

Este término sólo puede valer 1 para los valores siguientes de las variables: x=1; y=0; z=1. Si los valores de las variables fueran exactamente estos, ¿qué les ocurrirá al resto de términos de la FNDC, por ejemplo al $x'yz$?

Pues que variarán en al menos la complementación de una variable, en nuestro ejemplo en dos: *x* e *y*. Y al variar en alguna variable, quiere decir que alguno de los términos del producto será 0, por lo que el producto completo será cero.

Efectivamente, siendo x=1; y=0; z=1, el producto $x'yz$ es cero. Y todos los demás también, salvo el que cité al principio, el $xy'z$, que valdrá 1.

Luego la FNDC se compone de la suma de un único término que vale 1 y otros siete que valen todos 0, por lo que la suma final es… 1. Siempre 1.

Vale, todo esto está muy bien, pero… ¿Para qué diablos sirve esta dichosa Forma Normal Disyuntiva?

Pues para saber si dos funciones son en realidad la misma, puesto que ***toda función que sea igual a otra tendrá su misma Forma Normal Disyuntiva*** (y también su misma *Forma Normal Conjuntiva*, claro).

Esto nos será de gran utilidad más adelante, porque **podemos representar la FND de cualquier función booleana en forma de tabla**… y esto será crucial para comprender según qué sistemas. Habrá que esperar a los siguientes capítulos del libro para irlo descubriendo.

Paciencia.

Veamos entonces cómo quedaría la fórmula que habíamos visto antes, aquella tan fea en la que, tras operar convenientemente, habíamos visto que su Forma Normal Disyuntiva era finalmente la siguiente: $xy'z + xy'z' + x'yz'$.

Para rellenar la dichosa tabla, representamos todos los valores posibles de la Forma Normal Disyuntiva Completa (en este caso serán $2^3 = 8$), y entonces marcamos con un **0** los términos que **no están** en su FND, y con un **1** los que **sí están**, proceso que convendréis conmigo que es bastante sencillo.

Y el resultado es:

V: x	V: y	V: z	f(x,y,z)
x	y	z	0
x	y	z'	0
x	y'	z	**1**
x	y'	z'	**1**
x'	y	z	0
x'	y	z'	**1**
x'	y'	z	0
x'	y'	z'	0

Las cosas empiezan a tener sentido, ¿no?

Aquí se acabó la clase, aquel frío otoño de 1973. Y el capítulo con ella. En los capítulos que vienen a continuación usaremos continuamente estas tablas de valores, así que mejor comprenderlas muy bien…

III- Álgebra de Circuitos

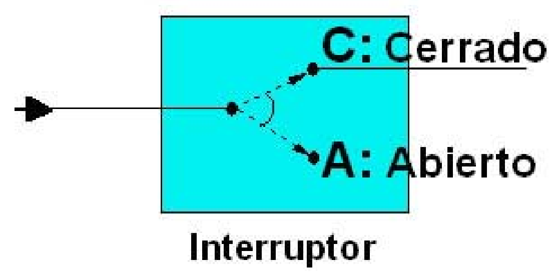
En el capítulo anterior trasteamos con la definición de la Forma Normal Disyuntiva en un Álgebra de Boole. Dije allí que sería importante para todo lo que vendría más adelante; aquí comenzaremos a ver cuál es esa importancia.

Repito una vez más que uso para confeccionar este pequeño libro los apuntes de Lógica de mi Segundo de Carrera, allá por 1973-74, impartidos por D. José Cuena, Pepe para casi todo el mundo.

Nueva semana, nueva clase. Don José Cuena aparece con cinco minutos de retraso (¡Pardiez, él también es humano!) y comienza su clase, definiendo qué es un interruptor… **un interruptor eléctrico**. Bueno, no es que nos describiera físicamente dicho artilugio infernal (materiales, tamaños, tolerancias, etc), no, sino para qué sirve.

Un interruptor es, definido de este modo, **un artefacto eléctrico que sirve para dejar pasar la corriente en un circuito o para cortarla, según que esté en estado Cerrado o Abierto, respectivamente**. Es decir, "la llave de la luz", vaya.





Un interruptor eléctrico, y su diagrama

Un interruptor puede estar en dos posiciones, mediante el accionamiento del mecanismo, que lo pone bien en estado "A" (y la corriente se corta), bien en estado "C" (y la corriente sigue su curso). O sea, mismamente una llave de la luz, sin ir más lejos.

Entonces, tras esta ingenua definición, comenzó Don José a modelizar cómo son los circuitos eléctricos, compuestos de cables e interruptores… Veamos qué es lo que pasa. Qué es *lo que pasó*, en realidad.

En primer lugar, un determinado interruptor puede ser modelizado por una variable, digamos "x" por ser originales, que sólo puede adoptar dos valores, que denotaremos como x y x', ya que el interruptor puede estar en uno u otro de los estados, pero no al mismo tiempo: **Abierto(A) / Cerrado(C)**.

Por convención asignamos el valor 1 al estado Cerrado (pasa la corriente) y 0 al estado Abierto (no pasa la corriente), aunque nada nos impediría hacerlo al revés. Asimismo, ambos estados son complementarios entre sí: lo contrario a Abierto es Cerrado, y viceversa, como es evidente.

Representado en una tabla, queda algo tan soso como:

x	x'
A	C
C	A

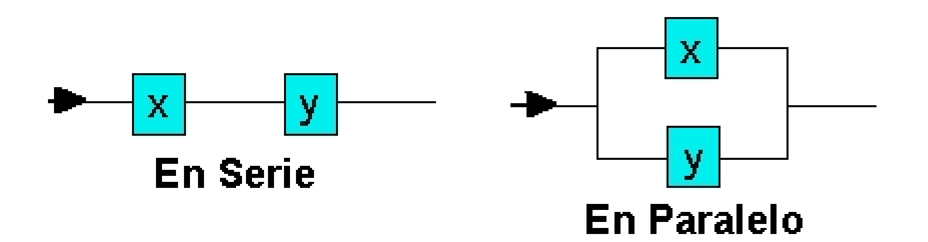
En cuanto a cómo podemos conectar cables e interruptores, o sea, qué *operaciones* es posible realizar con ellos, hay dos maneras, y sólo dos:

En serie: Dos interruptores *x* e *y* están conectados en serie si están conectados uno a continuación del otro sobre la misma línea. La corriente sólo pasa si ambos interruptores están simultáneamente cerrados.

En paralelo: Dos interruptores *x* e *y* están conectados en paralelo si están conectados cada uno en un ramal de la línea, volviendo a unirse ambos inmediatamente después. La corriente

pasa si cualquiera de los interruptores (o los dos) están cerrados.

El esquema de ambos casos es el siguiente:



Entonces, el esquema de funcionamiento puede establecerse mediante las siguientes tablas, recordando siempre que 0 significa Abierto y 1 significa Cerrado. Y sí, evidentemente, ¡aquí estamos usando la Forma Normal Disyuntiva!, la que vimos en el capítulo anterior.

Empezamos ya a vislumbrar cuál es su enorme utilidad.

Serie (·)	x	y	x·y		Paralelo (+)	x	y	x+y
	1	1	1			1	1	1
	1	0	0			1	0	1
	0	1	0			0	1	1
	0	0	0			0	0	0

Es evidente por su comportamiento que podemos llamar "·" a la operación "conectar en serie" y "+" a la operación "conectar en paralelo", dado que tiene como representación su misma tabla. Entonces, a partir de este momento usaré esta notación: cuando ponga "+" significa *conectar en paralelo*, y cuando diga "·", significa *conectar en serie*.

Ahora lo que corresponde es comprobar qué es el Conjunto (S,+,·) siendo S un conjunto de variables (interruptores) que admiten sólo dos valores (Abierto = 0 y Cerrado = 1, porque

para algo son interruptores y sólo pueden estar en esas dos posiciones) y las operaciones "+,·", es decir, las conexiones en paralelo y en serie, respectivamente.

¿**Será acaso este conjunto una hermosa Álgebra de Boole**? Para que ello fuera cierto debería cumplir los cuatro axiomas de Huntington que vimos en el primer capítulo del libro, pero si lo fuera… entonces no tendríamos que calcular nada más: todos los axiomas y hallazgos que hicimos para un Álgebra de Boole cualquiera servirían automáticamente para el cálculo de circuitos… Y eso seguramente sería una buena cosa.

Veamos, pues:

¿Son, quizá, conmutativas las operaciones + y ·?

Si escribimos la tabla anterior como tabla de doble entrada, poniendo cada variable *x*,*y* una en abscisas y otra en ordenadas, tenemos:

	y				y		
x	**+**	**0**	**1**	**x**	**·**	**0**	**1**
	0	0	1		**0**	0	0
	1	1	1		**1**	0	1

Si nos fijamos bien, ambas tablas son simétricas respecto a la diagonal "ángulo superior izquierdo – ángulo inferior derecho"; podemos deducir, por tanto, que ambas son conmutativas, pues. Además, el sentido común nos dice que si tenemos dos interruptores a y b conectados en serie, es indiferente que esté físicamente antes el a o el b… el resultado es el mismo, pues sólo pasa la corriente si ambos están cerrados, y lo mismo, o mejor dicho, lo contrario, si están en paralelo.

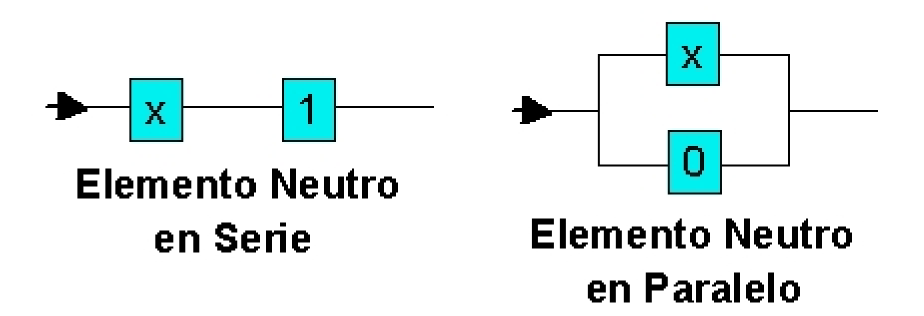
Por lo tanto, sí, los circuitos eléctricos cumplen con el axioma 1 del álgebra de Boole. Sigamos.

¿Existirán, tal vez, elementos neutros para ambas operaciones, + y · ? Estos elementos neutros serán **0** (abierto), para la suma (conexión en paralelo) y **1** (cerrado), para la multiplicación (conexión en serie).

Dado un interruptor cualquiera, si le conectamos un interruptor Abierto (0) en paralelo (operación "+"), el resultado del circuito, si circula o no corriente por él, depende exclusivamente del estado (Abierto-0 o Cerrado-1) del interruptor original.

A su vez, dado un interruptor cualquiera, si le conectamos un interruptor Cerrado (1) en serie (operación "·"), el resultado del circuito, si circula o no corriente por él, depende exclusivamente del estado (Abierto-0 o Cerrado-1) del interruptor original (de hecho este último caso es equivalente a alargar el cable conectando un nuevo trozo al trozo original).

Una imagen que vale más que mil palabras:



En términos algebraicos, pues: x+0 = 0+x = x, por un lado, y x·1 = 1·x = x, por el otro.

Por tanto, existe un elemento neutro de cada operación, y se cumple el Axioma 2 del álgebra de Boole.

No va mal la cosa. Prosigamos.

¿Serán, por ventura, distributivas las operaciones + y · respecto de la otra?

Si nos acordamos, la propiedad distributiva de un álgebra de Boole obligaba a que se cumplieran las siguientes ecuaciones:

x·(y+z) = xy+xz, por un lado, y por el otro:

x+(yz) = (x+y)(x+z).

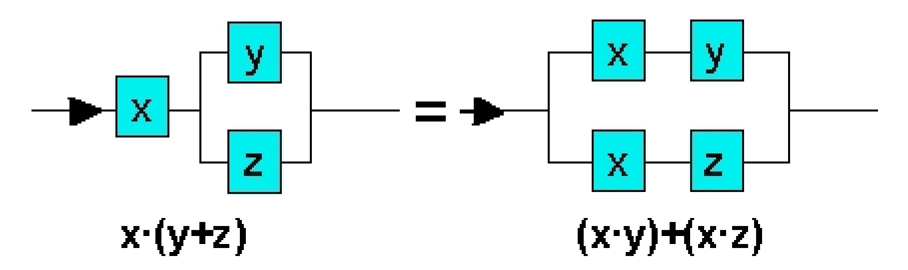
Para ver si, por ventura, se cumplen estas propiedades distributivas, construimos una tabla de valores, con la que comprobaremos si el circuito resultante tiene o no corriente al final.

Primero, para la distributiva de la multiplicación respecto de la suma, con la FND completa, de nuevo!, que tendrá 8 filas, es decir, 2^3, dado que son tres las variables: *x*,*y*,*z*.

x	y	z	y+z	x·(y+z)	xy	xz	xy+xz
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Esta tabla la hemos construido, paso a paso, fijándonos siempre en si la corriente circula o no en cada uno de los 8 casos representados por la combinación de las tres primeras columnas.

El esquema de construcción es el siguiente:

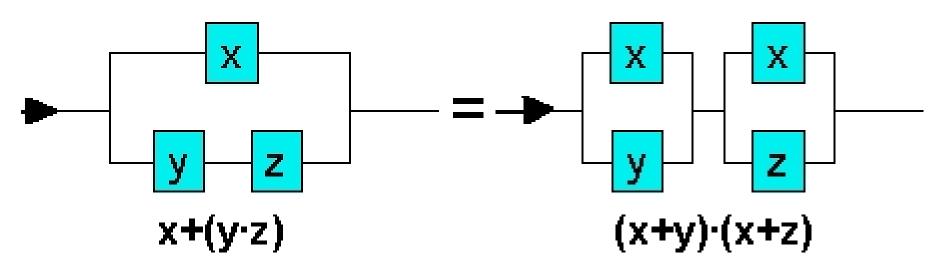


La quinta columna de la tabla, *x·(y+z)*, muestra el resultado del circuito mostrado en el primer dibujo; mientras que la última columna, *xy+xz*, muestra el comportamiento del representado en el segundo dibujo.

Se ve con claridad que ambos son perfectamente equivalentes, pues con cada posible posición de todos los interruptores, siempre que la corriente circula en el primer circuito, circula también en el segundo circuito, luego ambos circuitos son equivalentes, y por consiguiente cumplen esta propiedad.

Sólo queda comprobar la propiedad distributiva equivalente, es decir, si la propiedad distributiva de la suma respecto de la multiplicación se cumple también, y lo haremos de la misma forma, construyendo también su correspondiente tabla de valores.

En este caso, el esquema de construcción es el siguiente:



Veamos la tabla de valores correspondiente:

x	y	z	Yz	x+(yz)	x+y	x+z	(x+y)(x+z)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Esta tabla la hemos construido también paso a paso, fijándonos siempre en si la corriente circula o no en cada caso.

La quinta columna, $x+(yz)$, muestra el resultado del circuito del primer dibujo, cuándo circula la corriente y cuándo no circula, mientras que la última columna, $(x+y)(x+z)$, muestra el comportamiento del circuito del segundo dibujo. Idénticas.

Por tanto, **podemos asegurar que en los circuitos se cumplen ambas propiedades distributivas**, es decir, cumplen también el axioma 3 del álgebra de Boole.

Bien, bien, vamos bien… Sigamos con el último axioma que nos queda por comprobar.

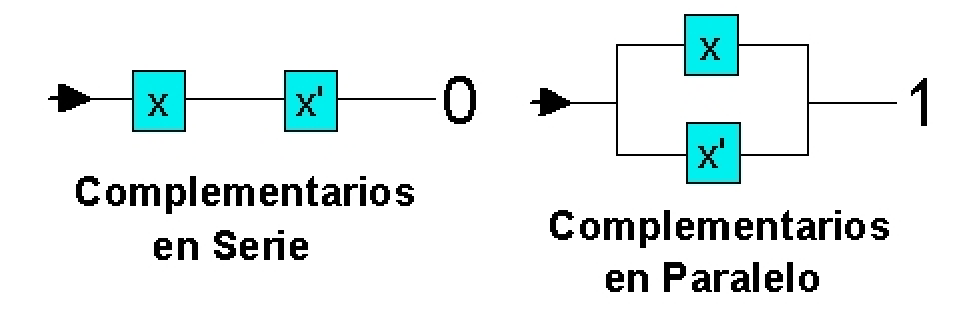
¿Existirá, por una afortunada coincidencia, un elemento complementario para cada elemento de S, es decir, para cada conmutador?

Ésta sí que es fácil, pues refleja la característica más característica (valga la redundancia) de un interruptor: que puede estar

abierto o cerrado… y nada más: no puede estar casi abierto y medio cerrado a la vez, al menos si no tenemos en consideración efectos cuánticos y demás… y aquí no encontraréis ni una palabra sobre cuántica, que para eso ya está la prodigiosa serie de Pedro en El Tamiz.

Y dado que un interruptor puede estar Abierto (0) o Cerrado (1), estados que, si al interruptor lo llamamos *x*, denominaremos *x'* y *x*, respectivamente, por convención (es decir, un interruptor puede estar en estado *x*, cerrado, o *x'*, abierto), entonces cumplen que $x+x'=1$ y que $x \cdot x'=0$.

Los siguientes dibujos representan ambas situaciones, donde se puede comprobar fácilmente el cumplimiento de ambas suposiciones.



En el primero, en serie, sea cual fuera el valor de *x*, Abierto o Cerrado, su complementario *x'* tiene el valor contrario. Por tanto, uno de los dos está siempre Abierto… y como consecuencia no hay corriente en el final del circuito. Lo contrario pasa si están conectados en paralelo; uno de los dos estará necesariamente Cerrado, lo que garantiza que al final del circuito haya siempre corriente.

Por lo tanto, los circuitos cumplen también el Axioma 4 del álgebra de Boole. Y como éste postulado era el último que quedaba, eso quiere decir que los circuitos cumplen **todos** los axiomas del álgebra de Boole.

Estupendo. ¿…Y entonces?

Pues que vamos a poder representar circuitos eléctricos con funciones booleanas. Ni más, ni menos. Así que lo primero que haremos es denominar **Álgebra de Circuitos** a las operaciones que podemos hacer con circuitos, añadiendo o quitando interruptores… Y **el álgebra de Circuitos es un álgebra de Boole**, una vulgar y nada especial álgebra de Boole, un álgebra de Boole monda y lironda.

Como consecuencia, **todas las transformaciones, teoremas y cositas varias** (como la Forma Normal Disyuntiva) **que hemos encontrado y demostrado para el álgebra de Boole son inmediata y directamente aplicables al diseño de circuitos**.

¡Casi nada! *Ya habéis aprobado el primer curso de Electricista.* Hala. Ya sólo os queda aprender todas esas tonterías de la Ley de Ohm, los voltajes y los amperios y cuándo no conviene tocar con los deditos un cable pelado para no tener que bailar claqué sin pretenderlo, pero eso, leyendo el libro que sobre Electricidad escribió Pedro en El Tamiz, es pan comido. Bueno… o no.

Algunos electricistas me he topado yo a lo largo de mi vida que si tuvieran algún conocimiento de álgebra de Boole hubieran mucho mejor su trabajo, porque… ¡tengo cada chapuza de conexiones de cables en mi casa!, como, por ejemplo, que la luz del pasillo esté simultáneamente conectada a dos diferenciales diferentes, o que cuando se va una zona determinada, la de la cocina, porque salta el diferencial al enchufar la plancha, la lavadora y el horno a la vez, entonces el salón, que no tiene nada que ver en teoría, se queda a media luz… Misterios de las conexiones escondidas en tubos, cajas y empalmes. Escondidas, sí, pero mal hechas.

Volviendo a lo nuestro, Don José Cuena estuvo varios días dando vueltas a la teoría de Circuitos; hablando sobre Diseño de Circuitos, o viendo, por ejemplo, el método de Karnaugh para simplificar circuitos. Esto de simplificar circuitos es útil cuando te dan un circuito embarullado, como los de mi casa sin ir más lejos, y tienes que buscar un circuito equivalente más sencillo que haga lo mismo… Ojo, *lo mismo*, no *lo correcto*, que eso es otra cosa.

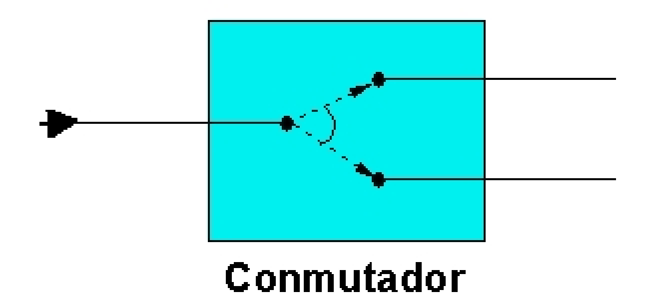
No voy a entrar en detalle en esta parte, sin duda muy interesante, pues a mí me ha servido muchas veces ante el dilema de cómo conectar de la mejor manera posible algún cacharro en casa, pero que se escapa del alcance de este libro. No quiero entrar en conflicto con ningún sindicato de electricistas.

Además, Javier "J" Sedano publicó un magnífico artículo sobre el método de Karnaugh dentro de la propia serie *Eso que llamamos Lógica* en El Cedazo, artículo que encontraréis como Apéndice II al final de este libro.

Sólo voy a poner un único ejemplo de cómo diseñar un circuito que probablemente sea de los más útiles que necesitaremos en nuestras mansiones: cómo instalar un foco, lámpara o simple bombilla desnuda regulada por dos conmutadores.

Un conmutador es parecido a un interruptor, tan parecidos como que por fuera son igualitos, pero con dos salidas en vez de una; por lo tanto lo que hace en realidad es enviar (conmutar) la corriente por uno u otro camino, en vez de simplemente interrumpir o no la corriente.

Su diagrama es el siguiente:



Fijaos que en realidad el conmutador no *interrumpe* nada, tan sólo deriva (conmuta) la corriente eléctrica por uno u otro cable, según que su mecanismo esté situado en una u otra posición. O sea, siempre tiene un lado abierto y el otro cerrado (salvo los nanosegundos en que el mecanismo en movimiento, en que no está en contacto con ningún borne… pero mejor vamos a obviar esto, ¿no?).

En realidad, bien se podría usar un conmutador como mero interruptor, simplemente no conectando nada a una de las dos salidas. De hecho la mayoría de aparatos comerciales que se venden hoy por ahí son todos conmutadores, pues el pequeño sobrecoste de la circuitería adicional no compensa comercialmente fabricar y distribuir varios tipos de mecanismo.

Son cosas de la economía moderna: en mis tiempos eso no pasaba, había conmutadores e interruptores, que eran bastante más baratos, aunque hay que reconocer que los interruptores eran redondos, con una especie de palomillas giratorias que, en una posición, por ejemplo en vertical, estaban abiertos, mientras que en la otra, en horizontal, estaban cerrados… a ver quién es el artista que diseña un conmutador con semejantes características.

Volviendo a nuestro caso, lo que tenemos es una habitación normal y corriente en la que hay dos llaves de la luz (conmutadores en este caso), una en cada extremo de la habitación, y queremos que cualquiera de las llaves encienda/apague la luz independientemente de la posición de la otra, es decir, que si la luz está encendida, al accionar cualquier conmutador se apague, y viceversa, si está apagada, que se encienda cuando accionemos cualquiera de los dos. Lo mismito que tenemos en el salón o el dormitorio, vaya.

Lo primero de todo es modelizar el comportamiento de nuestro sistema, teniendo en cuenta que llamaremos a los dos conmutadores *x* e *y*, para variar. Para ello crearemos la tabla de estados, en la que modelizaremos nuestro sistema de dos conmutadores.

¿Cómo hacemos eso?

Mediante la Forma Normal Disyuntiva, desde luego.

La tabla resultante es la siguiente:

x	y	¿Hay luz?
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

El primer valor (un 1) lo ponemos arbitrariamente, pues en principio igual nos da que en este caso haya luz o no en la habitación… salvo que seáis unos frikis como yo y os empeñéis en que cuando todos los interruptores o conmutadores de la casa están hacia abajo, esté toda la casa apagada… Ese truco permitiría dejar todas las luces de la casa apagadas incluso cuando no hubiera electricidad. En fin, cosas mías.

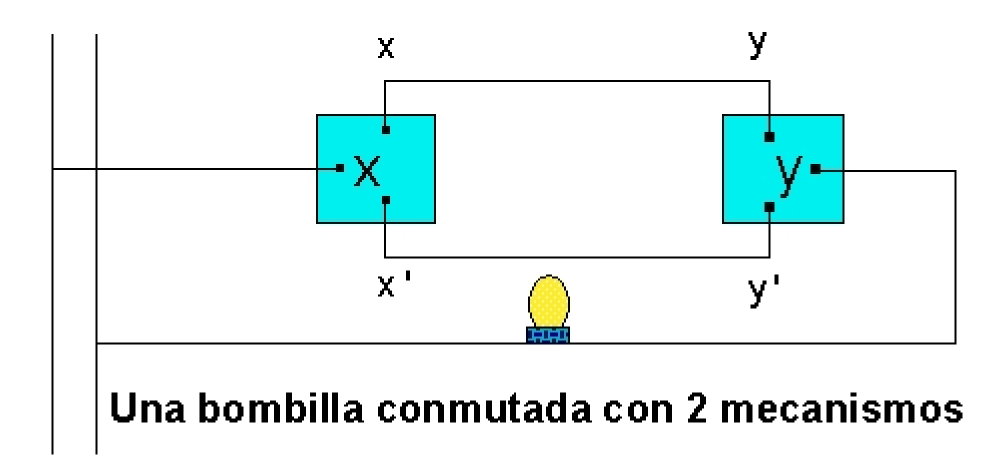
Lo importante, digo, es que una vez fijado este caso inicial, con una única pulsación sobre cualquier conmutador la luz se apague, y una vez apagada, con una única pulsación sobre cualquier conmutador la luz se encienda. Eso quiere decir que, desde el estado inicial (1,1), una única variación en cualquiera de los dos conmutadores (0,1) ó (1,0), debe apagar la luz; mientras que a partir de cualquiera de estos dos estados, un único cambio en cualquier variable, o sea, una pulsación en cualquier conmutador, encienda la luz. Esos dos estados son el (1,1) original o el (0,0).

¿Se ve claro? Espero que sí.

Pues ahora podemos darnos cuenta de una pequeña sutileza: si sumamos (ojo: esta vez, y sin que sirva de precedente, utilizaremos *una suma numérica normal*, no booleana) los valores 0 ó 1 de cada fila, si la suma da un valor cero o par ((1,1) suma 2, y (0,0) suma 0), el sistema debe estar encendido; mientras que si el resultado de la suma es impar ((0,1), (1,0), que ambos suman 1), el sistema debe estar apagado. Interesante, ¿no?

Bien, ahora escribamos la función booleana que describe el sistema a partir de la tabla de funcionamiento, que ya sabéis que es la Forma Normal Disyuntiva de la Variable. La función "Bombilla encendida" se representa por la función ***f(x,y)=xy+x'y'***. Es decir, ambos conmutadores pueden estar o bien "hacia arriba" o "hacia abajo" para que la corriente transite por la bombilla y podamos leer a su luz algún buen libro…

¿Cómo se implementa esta función *xy+x'y'* con los conmutadores? Fácil; mediante su conexión de la forma siguiente:

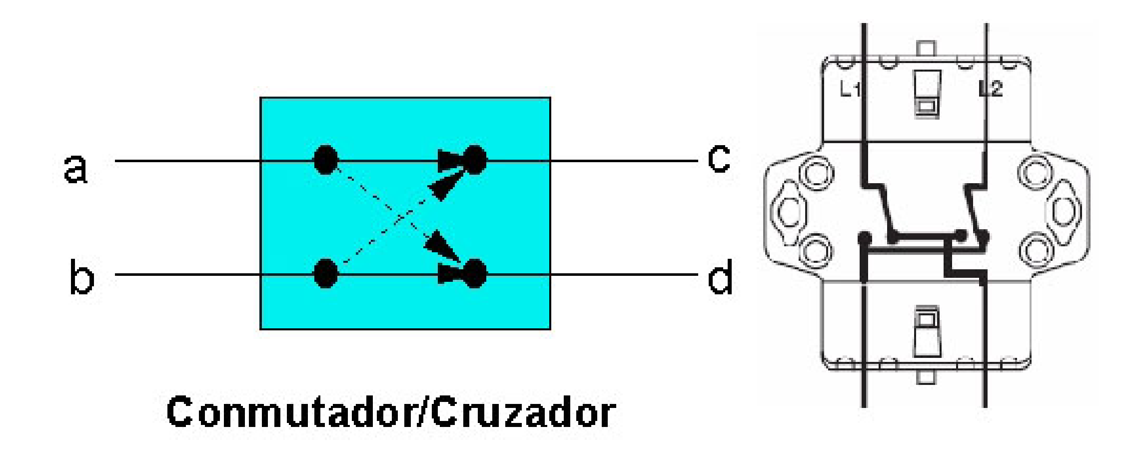


Una bombilla conmutada con 2 mecanismos

Ahora, sabiendo esto, podemos diseñar circuitos donde no haya dos conmutadores para encender/apagar un sistema, sino que haya tres, cuatro… Se crea la tabla de valores de todos los estados posibles de todos los conmutadores (2^n posibilidades), y se marca cuáles de ellos deben dar como resultado de la función "Apagado" (0) ó "Encendido" (1). Para no equivocarse al asignar valores, se puede uno ayudar por el truco de sumar todos los valores (con una suma numérica normal) y asegurarse que todos los valores impares tengan el mismo valor final (0 ó 1, igual da), y los valores pares o cero, el contrario. Este truco garantiza que desde cualquier posición, el cambio de una única variable (o sea, el accionamiento de un conmutador cualquiera) cambia el resultado de la suma en 1, en más o en menos, y eso cambia la paridad del resultado final, y por tanto, el valor Encendido/Apagado de nuestra bombilla.

Así que, si os viene en gana y queréis practicar, podéis diseñar cómo sería el circuito para tener **tres conmutadores** que gobiernen el encendido de una bombilla: uno en la entrada de la habitación, otro al lado de la cama y el tercero al lado de la mesita. No deberíais tener ningún problema en llegar a la función.

Pero quizá sí lo tengáis al diseñar el circuito… porque necesitaréis de un nuevo mecanismo que llamaremos conmutador de cruce, conmutador/cruzador, o simplemente "cruzador", cuyo diagrama de actuación es el siguiente:



En la imagen no sólo está el diagrama del cruzador, sino también el diagrama técnico de un cruzador comercial, para mayor información.

En una de sus posiciones, el conmutador-cruzador permite el paso *directo* de corriente, de *a* a *c* y de *b* a *d*, mientras que en la otra permite el paso *cruzado* de la corriente, de *a* a *d*, y de *b* a *c*.

Como veis, este conmutador no interrumpe nunca la corriente, sino que deriva ambas entradas por un camino o por su contrario, dependiendo de su posición. Ya sólo os queda diseñar el circuito…

Para terminar el capítulo, uno de los problemas que nos puso Don José en el examen sobre circuitos, allá por las navidades del 73, aunque lo he *tuneado* un poco … No es muy difícil, pero sí muy divertido. No voy a dar la solución para no chafaros el disfrute de hacerlo y aprender un poco más sobre circuitos eléctricos. Dice así:

"Pedro, J y Mac, como no tienen otra cosa que hacer, están jugando a cara o cruz con una moneda cada uno y un dispositivo eléctrico con tres botones, cada uno de ellos asociado a cada uno de los jugadores, que denominaremos *p, j y m.*

"Cada jugador lanza su moneda y pulsa el botón correspondiente si sale cara y no lo pulsa si sale cruz.

"Gana el juego el jugador que tenga un valor en su moneda distinto al de los otros dos. Por ejemplo, si Pedro tiene cara y J y Mac tienen cruz, gana Pedro. O si J tiene cruz y Pedro y Mac tienen cara, gana J. Si los tres valores son iguales, no gana nadie.

"Se pide diseñar un circuito con un origen (una toma única de corriente) y cuatro bombillas que se iluminan: la bombilla 1, si gana Pedro; la bombilla 2, si gana J; la bombilla 3, en el altamente improbable caso de que gane Mac; y, por fin, la bombilla 4 si no gana nadie."

Que sepáis que aquél que logre resolverlo (no es tan difícil) no va a poder patentarlo… ¡Ya lo hice yo, je, je! Incluso me sirvió para aprobar el primer parcial de la asignatura.

Hasta aquí lo que voy a contar sobre circuitos eléctricos. En la red podéis encontrar mucho más y mejor que esta breve introducción. Y, desde luego, en cualquier curso sobre electricidad.

Pero no contado de esta manera, me temo.

En el próximo capítulo, una vez bien sentadas las bases, empezaré a hablar (mejor dicho: *Pepe Cuena* empezará a hablar), de una vez por todas, de algo parecido a la Lógica.

IV- El álgebra de Conjuntos, revisitada

En el capítulo anterior de este libro dedicado más o menos a la Lógica dimos un vistazo necesariamente rápido al álgebra de Circuitos. Me dejé por contar bastantes cosas sobre simplificación de circuitos, diseño, etc, sobre todo por el método de Karnaugh (en realidad se suponía que muchos de nosotros nos tendríamos que dedicar al diseño de hardware, así que se contaban todas estas cosas; luego, el 95% o más de nosotros nos dedicamos al software) pero creo que no aportaba gran cosa a lo que quería contar.

Además, en la red se encuentra bastante documentación al respecto para los electricistas en ciernes, incluyendo el estupendo artículo de J en El Cedazo que encontraréis en el Apéndice II de este librito.

Así que seguiré con la asignatura de Metodología de mi Segundo de Carrera, impartida por Don José Cuena Bartolomé en el Instituto de Informática (antes de que se convirtiera en Facultad), allá por finales del año 1973…

Bueno, pues tras contar teoría sobre al álgebra de Boole y su inmediata aplicación a los Circuitos eléctricos, Pepe Cuena entró a saco a la Teoría de Conjuntos (ésa que conocíamos malamente desde el Bachillerato, con sus diagramas de Venn y todo eso), pero con una orientación bastante diferente de la que habíamos visto entonces, con una orientación muy… lógica, si se me permite la expresión.

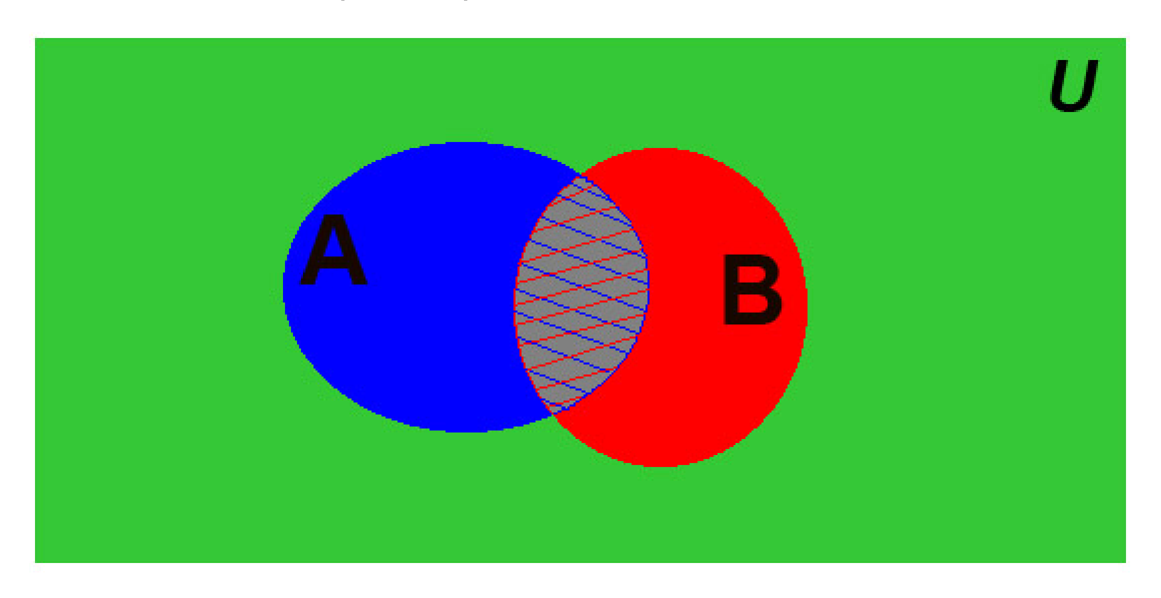
Enseguida veréis por qué digo esto…

Los conjuntos, definidos de la forma clásica, es decir, todos aquellos grupos de elementos dentro del "Conjunto Universal" que son factibles de agruparse por cualquier criterio, más las operaciones Union (+) e Intersección (·), forman un álgebra de Boole, eso es algo bastante claro. De hecho, fue este conocimiento (al que llegamos tras horas de frustrantes especulaciones, como conté en el primer capítulo del libro) el que nos libró de ser ingresados en un frenopático cuando nos enfrentamos

por vez primera con el álgebra de Boole, así que lo dábamos por descontado.

Aviso: A lo largo de este capítulo dedicado al álgebra de conjuntos, y en contra de lo normalmente aceptado, usaré siempre · y + en vez de ∩ y ∪. Con ello pretendo afianzar la idea de que el álgebra de conjuntos es un álgebra de Boole de lo más normalita.

Para aquellos de vosotros que tengáis un poco oxidados los conjuntos, justo a continuación tenéis un par de ellos para vuestro uso y disfrute, A (azul) y B (rojo), inmersos en un "Conjunto Universal" *verde que te quiero verde*…



Dos conjuntos típicos en un Diagrama de Venn

La intersección entre A y B es la parte gris rayada; la unión entre A y B es… todo lo que no es verde; el complementario de A es lo que le falta para ser el Universal, es decir, lo que no es azul (y el complementario de B, lo que no es rojo), etc, etc. Para fijar ideas, suponed, por ejemplo, que el conjunto A son "*los rubios*" y el conjunto B, "*los que tienen más de cincuenta años*", y rápidamente podéis poner cara y ojos a todos y cada uno de los grupitos que aparecen en el dibujo.

También os acordaréis de que un conjunto puede contener a otro. Por ejemplo, el conjunto de los europeos contiene al conjunto de los españoles, y a su vez el conjunto de los españoles está contenido en el conjunto de los europeos, y decimos que "los españoles" son un subconjunto de "los europeos"… Hasta aquí no creo que haya descubierto nada nuevo.

Entremos, pues, en materia:

Es evidente que, lidiando con conjuntos:

1- Las dos operaciones (+,·, es decir, Unión e Intersección) son conmutativas.

2- Existe un elemento neutro para cada operación: el Conjunto Vacío, o 0, para la unión (+) y el Conjunto Universal, o 1, para la intersección (·).

3- Ambas operaciones cumplen la propiedad distributiva respecto de la otra (A·(B+C) = A·B+A·C; y A+(B·C) = (A+B)·(A+C)).

4- Todo Conjunto A tiene su complementario A' tal que A+A'=1 y A·A'=0, es decir, el Conjunto Universal menos el propio conjunto A.

Así que, al cumplir con los axiomas de Huntington, **no queda duda de que los conjuntos, con la Unión y la Intersección, forman un álgebra de Boole**.

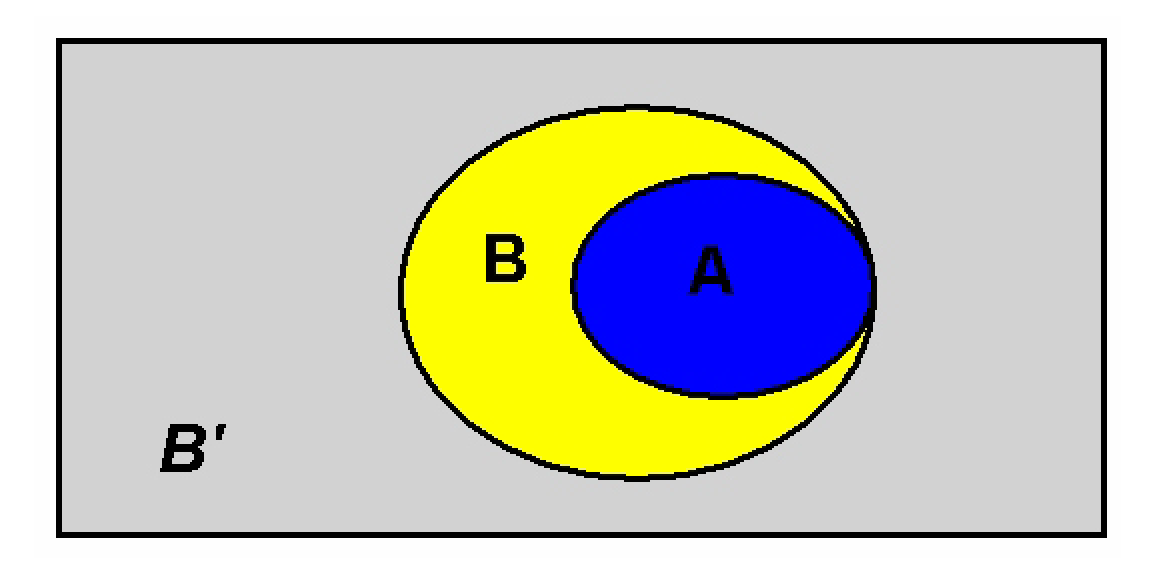
En teoría de conjuntos, una cierta información aplicada a un cierto conjunto permite determinar un subconjunto de él. Por ejemplo, si tenemos el conjunto de todas las ovejas de un rebaño, aplicando una cierta información, un cierto atributo de ellas (el de *ser negras*, por ejemplo) define un subconjunto del anterior, el que forman las ovejas negras del rebaño, o sea, aquellas ovejas que, perteneciendo al rebaño, son negras, es decir, aquellas ovejas en las que se cumple que la frase "ser negra" es verdadera, siendo una oveja negra la intersección entre las ovejas y las cosas que son negras... o algo así.

Como no todas las ovejas del rebaño son negras (o sí, quién sabe, pero en principio esto es irrelevante), se define la relación "Estar contenido en" ($\subseteq$) por la que denotamos que todos los elementos de un determinado conjunto pertenecen también a otro conjunto de rango superior. Estrictamente, un conjunto A es contenido por uno B ($A \subseteq B$) cuando *todos los elementos de A están también en B*, pero el conjunto B puede tener más elementos que no estén contenidos en A… o no, en cuyo caso A y B serían iguales ($A = B$). En este caso, tanto A contiene a B como B contiene a A.

Si os acordáis del segundo capítulo del libro, dedicado fundamentalmente a definir la Forma Normal Disyuntiva, comenzaba explicando qué era la relación $a \leq b \Longrightarrow a \cdot b' = 0$, y cómo esta relación "*menor o igual que*" definía en un álgebra de Boole una relación de orden parcial. Pues bien, tratándose de conjuntos, la relación "*es contenido por*" es equivalente a la relación $\leq$, y, por tanto, es también de orden parcial.

Como consecuencia, sólo queda decir que $A \subseteq B$ es lo mismo que decir que $A \cdot B' = 0$. O sea, en español corriente, que **si un conjunto A está contenido en otro conjunto B,** entonces **la intersección de A con el complementario de B es el conjunto vacío.**

No… no pongáis caras raras, que es algo evidente. Echad una ojeada al siguiente dibujo (que ya salió hace un par de capítulos), y lo entenderéis.



Si A está contenido en B, entonces la intersección de A (la zona azul) con el complementario de B (B', o sea, la zona gris) es el conjunto vacío, pues no comparten ni un solo elemento… Fácil.

Bien, pues ya tenemos todo lo que necesitamos para operar con conjuntos. Porque al saber que el álgebra de conjuntos es un álgebra de Boole, sabemos que en la relación de orden se cumple la propiedad transitiva, es decir, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$… y eso nos lleva probablemente a entender de una forma nueva (o, bueno, quizá no *tan* nueva) las implicaciones de la teoría de conjuntos…

Veamos un ejemplo.

Supongamos que tenemos una serie de afirmaciones que se suponen ciertas referidas a un cierto entorno, un país, pueblo… o a toda la humanidad, tanto da:

1 – Un hombre que no es feliz no es dueño de sí mismo.

2 – Todo hombre casado tiene responsabilidades.

3 – Todo hombre, o bien está casado o es dueño de sí mismo o ambas cosas.

4 – Ningún hombre con responsabilidades puede pescar todos los días.

¿Qué podemos decir de esta comunidad de vecinos, aplicando lo que sabemos de teoría de conjuntos y del álgebra de Boole?

En primer lugar, definimos un Conjunto Universal, que engloba a todos los hombres de ese entorno al que se refiere el enunciado, y definimos luego una serie de conjuntos (contenidos en ese Conjunto Universal) que definimos según la propiedad o propiedades definidas por las frases.

En una palabra, cada afirmación está definiendo de forma implícita un subconjunto del Conjunto Universal… y estos subconjuntos son (en todos los casos, *x* representa a un hombre perteneciente al Conjunto Universal):

Conjunto F: *x* es feliz.

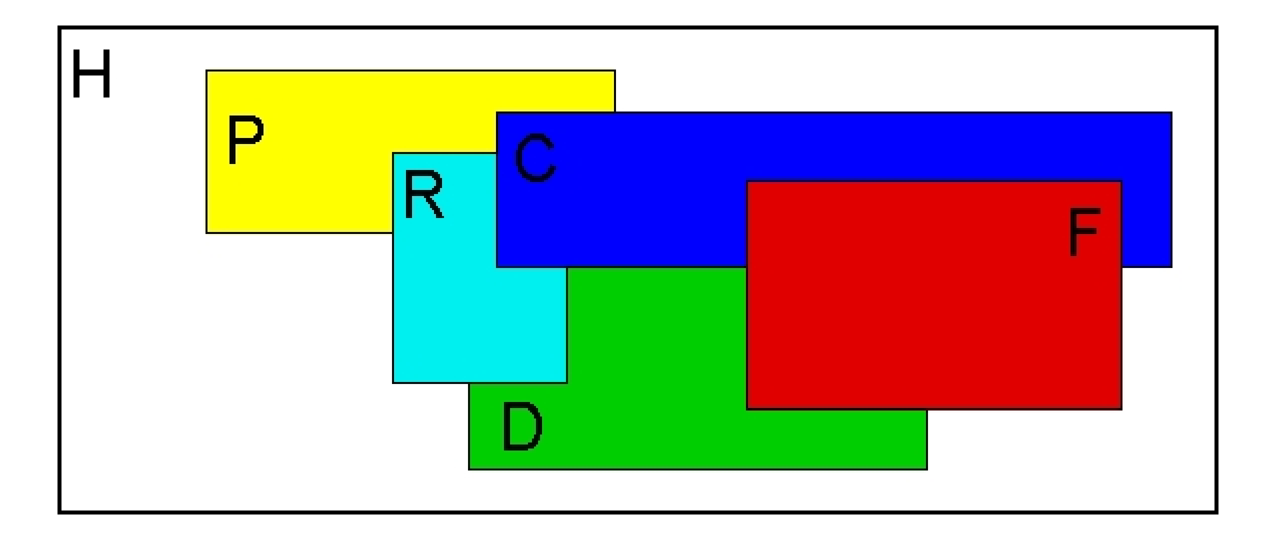
Conjunto D: *x* es dueño de sí mismo.

Conjunto C: *x* está casado.

Conjunto R: *x* tiene responsabilidades.

Conjunto P: *x* puede pescar todos los días.

Si no supiéramos nada más, esto podríamos representarlo, grosso modo, de la siguiente manera (siendo el conjunto H de todos los hombres, el Universal), o de cualquier otro modo donde los conjuntos tengan cualquier otra configuración posible:



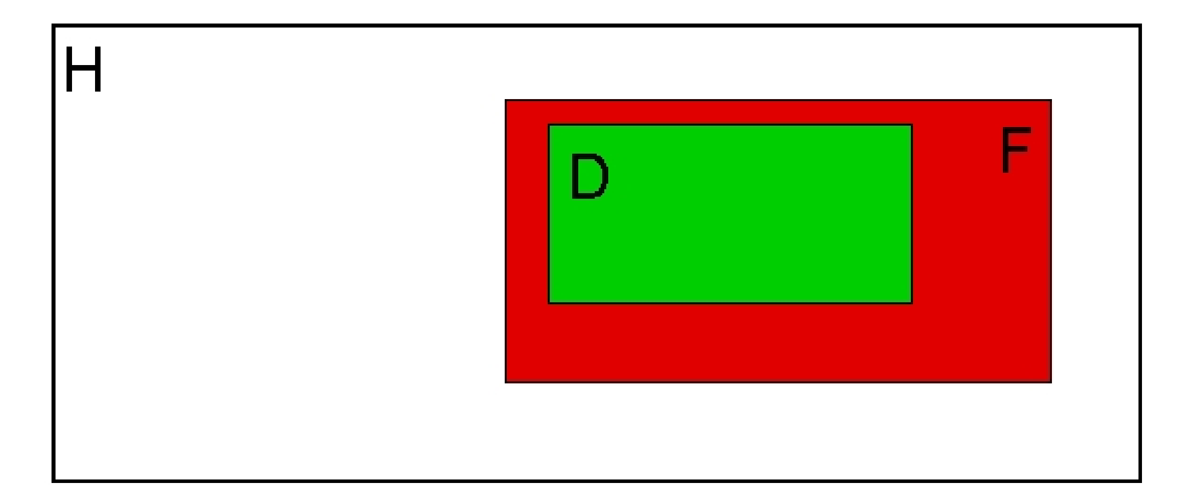
Posibles Conjuntos y Subconjuntos de H

Pero, claro, en realidad **sí que tenemos información adicional** que nos ayuda a establecer determinadas relaciones entre esos conjuntos… veamos cómo:

1 – *Un hombre que no es feliz no es dueño de sí mismo* podemos expresarlo como que *el conjunto de los "no felices" está contenido en el conjunto de los "no dueños de sí mismos"*, y lo representamos como $F' \leq D'$, pero también podemos como $D \leq F$, pues al complementar ambos términos de la ecuación cambia el signo de la relación, o sea, el orden.

Traduciendo esta afirmación, $D \leq F$, al español corriente, lo que dice es que el conjunto de los Dueños de sí mismos está contenido en el de los Felices, es decir, *los dueños de sí mismos son felices*, cosa implícita en la frase del enunciado, pero que no es, ni mucho menos, tan evidente. Es decir, de la imagen genérica que teníamos antes, ya podemos decir algo más sobre este par de conjuntos en particular.

A continuación, una representación de estos dos conjuntos, *Dueños de sí mismos* y *Felices* (subconjuntos del Universal H, en realidad) tal como son uno respecto del otro.



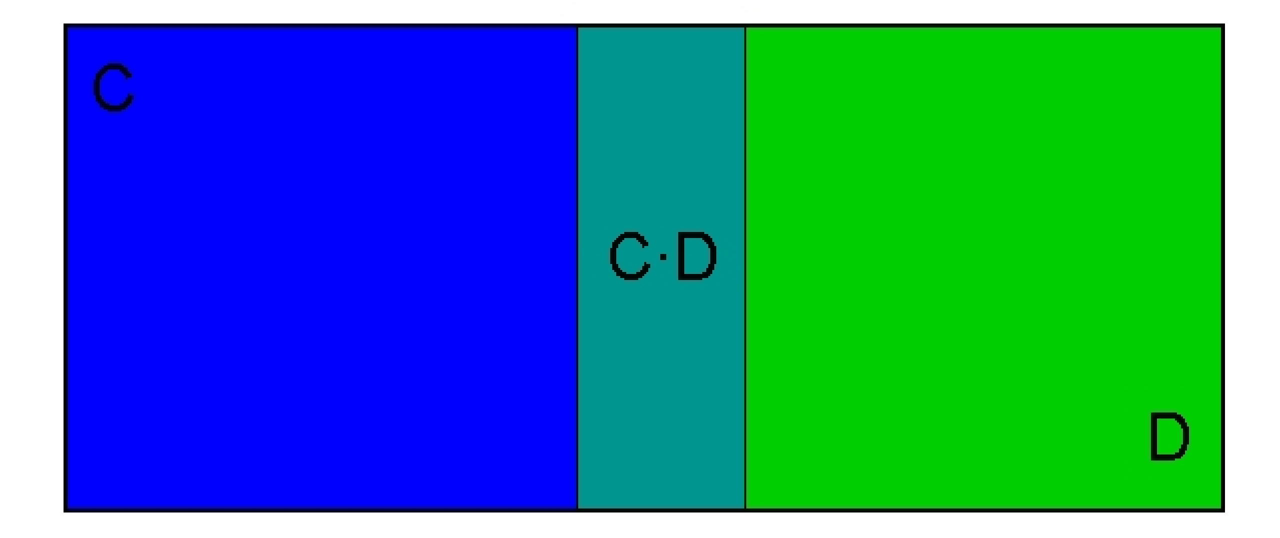
Sigamos con el resto de enunciados:

2 – *Todo hombre casado tiene responsabilidades*. Es decir: $C \leq R$, pero también $R' \leq C'$, por la misma razón que antes.

3 – *Todo hombre, o bien está casado o es dueño de sí mismo o ambas cosas*. En una palabra: $C + D = H$, pues la unión entre los conjuntos C (los casados) y D (los dueños de sí mismos) abarca a todos los hombres. Por lo tanto, siendo H el universal, podemos reescribir la ecuación como $C + D = 1$… o $C' \cdot D' = 0$, que, como sabéis, es lo mismo, gracias a la tan socorrida Ley de De Morgan.

Sí, sí, es así, es lógico: si C y D cubren conjuntamente todo el Universal, el H, podemos decir que todos los hombres (elementos del conjunto universal) pueden estar en una de estas tres situaciones, y sólo en una: pertenecen a C, pero no a D; pertenecen a D, pero no a C; o bien pertenecen simultáneamente a C y a D. No hay nadie que esté en C'·D'.

El siguiente diagrama lo ilustra, siendo la parte marcada en turquesa la intersección de ambos conjuntos C y D.



Los Casados y los Dueños de sí mismos.

Luego la intersección de los complementarios de cada conjunto es el conjunto vacío. ¿De acuerdo hasta aquí?

Bien, entonces tenemos que $C' \cdot D' = 0$. Si recordamos la definición de la relación de orden parcial "Es Contenido" ($\leq$), sabíamos que $a \leq b \Longrightarrow a \cdot b' = 0$. Luego el hecho de que sea $C' \cdot D' = 0$ quiere decir, simultáneamente, dos cosas:

Una: que $C' \leq D$. Dos: que $D' \leq C$.

No os hagáis cruces, que es algo evidente: si lo hacemos ahora al revés, vemos que la relación $C' \leq D$ implica que $C' \cdot D' = 0$. Pero también la relación $D' \leq C$ implica que $D' \cdot C' = 0$. Luego ambas relaciones de inclusión son válidas. Echad un ojo al diagrama de más arriba para entenderlo, si aún os quedan dudas.

Por lo tanto, el tercer enunciado podemos descomponerlo en dos ecuaciones independientes: $C' \leq D$ y $D' \leq C$ (que, por cierto, si os fijáis bien, son cada una de ellas la complementación de la otra).

4 – *Ningún hombre con responsabilidades puede pescar todos los días.* Es decir: $R \leq P'$ (los que tienen responsabilidades son un subconjunto de los que no pescan cada día), y también $P \leq R'$ (los que pescan cada día no tienen responsabilidades).

Bueno, pues si ahora empezamos a ir tomando los enunciados, y aplicando la propiedad transitiva inherente a la relación de orden $\leq$, tenemos que:

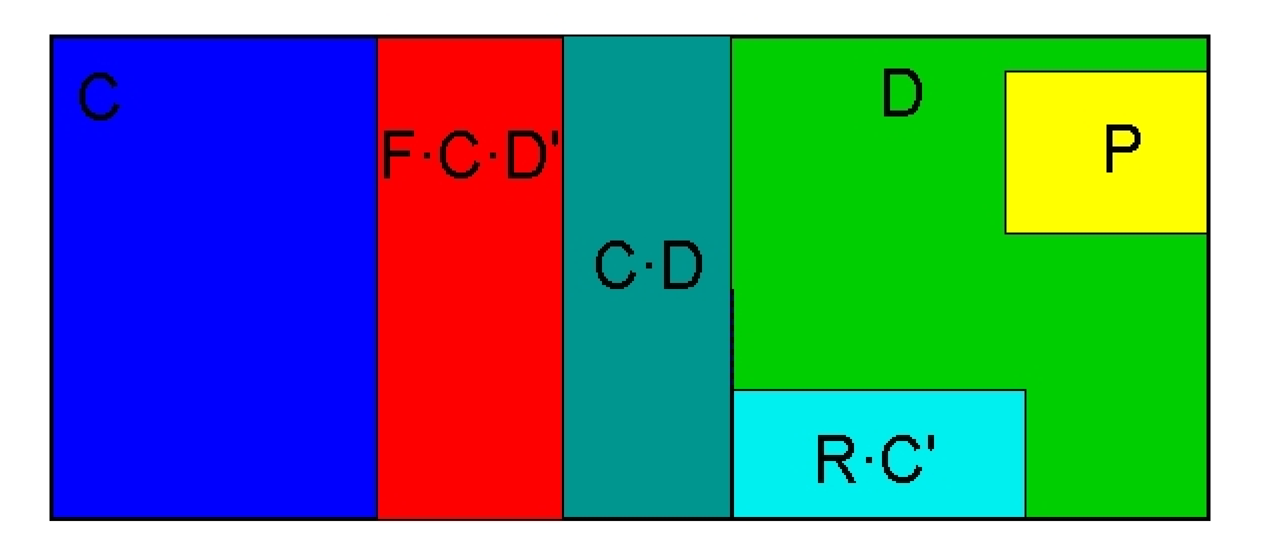
De $P \leq R'$ (4) y $R' \leq C'$ (2), tenemos que $P \leq C'$: *Los que pescan no están casados*.

De la anterior $P \leq C'$ y $C' \leq D$ (3), tenemos que $P \leq D$: *Los que pescan son dueños de sí mismos*.

De la anterior $P \leq D$ y $D \leq F$ (1), tenemos que $P \leq F$: *Los que pescan son felices*.

Bueno, ¡tampoco es tanta sorpresa!

Con todo este conocimiento podríamos representar todos estos conjuntos, por ejemplo, mediante la imagen siguiente:



Configuración final de los diversos conjuntos

Donde los que pescan son el grupito amarillo que ni están casados ni tienen responsabilidades, pero sí que son dueños de sí mismos y felices; el grupo de los que tienen responsabilidades son todos los casados más el grupito azul claro, que sí que son dueños de sí mismos y, por lo tanto, felices, pero en cambio no están casados.

Además, el grupo de los felices son todos los dueños de sí mismos más la franja roja (que están casados, y no son dueños de sí mismos)… en fin, creo que es suficiente.

Igual esta ristra de ecuaciones os ha dejado temblando… porque he hecho una serie de conversiones y operaciones que quizá os hayan sorprendido, puesto que estamos hablando de casados, de gente que pesca y de los que son felices o no, y no estamos acostumbrados en absoluto a pensar en conjuntos de personas en términos algebraicos. Llega entonces el tándem Cuena-Macluskey y se lía a poner ecuaciones…

Lo que he hecho han sido, en realidad, tres pasos, a saber:

Primero: He convertido los enunciados del problema a ecuaciones algebraicas (de álgebra de Boole, pero algebraicas, al fin).

Segundo: He operado con las ecuaciones, simplificado, etc, hasta llegar a un resultado (o varios parciales, tanto da).

Tercero: He "traducido" el resultado o resultados parciales nuevamente a lenguaje cotidiano: *Los que pescan son felices*, por ejemplo. Hala.

Y todo esto es una forma de proceder bastante extraña.

¡Un momento! ¿Seguro que ésta es **una forma extraña de proceder**? ¿*Seguro... seguro*?

Pongamos otro problema diferente:

"*Pepito tiene diez caramelos que le ha regalado su tía. Le da tres a su hermana. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Pepito?*".

¿Qué hacemos para resolver este singular y dificilísimo problema de Quinto de Carrera?

Primero: Convertimos el enunciado del problema a ecuaciones algebraicas (de álgebra numérica "normal"). Decimos que $x = 10$, siendo *x* el número de caramelos de Pepito antes de la dádiva a su hermana, y que $y = x - 3$, siendo *y* el número de caramelos que le quedan a Pepito al final y 3, los caramelos que intervienen en la transacción.

Segundo: Operamos con las ecuaciones, simplificado, etc, hasta llegar a un resultado (o varios resultados parciales, tanto da). Aquí diremos que $y = x - 3 = 10 - 3 = 7$. El resultado final buscado es, por tanto, $y = 7$.

Tercero: Traducimos el resultado nuevamente a lenguaje cotidiano. *Los caramelos que le quedan a Pepito son 7*. Hala.

Luego… ¿Qué he hecho yo en el problema de los felices y los casados que no pescan que sea *distinto* a lo que hacemos normalmente para resolver problemas de cualquier tipo? Nada. **Nada de nada**. Únicamente he usado álgebra de Boole en lugar de la "normal", pero el método utilizado es ni más ni menos que el de toda la vida.

Espero que esta diatriba os haya tranquilizado. Un poco, al menos.

Llegados, en fin, a este punto en el que ya no estamos seguros de que si somos felices es porque pescamos o que si nos casamos es porque no sabemos lo que hacemos, vamos a hablar de las ecuaciones booleanas y las cosas que les pasan que son de utilidad para nosotros.

En primer lugar, cualquier ecuación puede reducirse a una equivalente en que el segundo miembro es nulo, lo que no debería sorprendernos, puesto que pasa también en las ecuaciones algebraicas normales. Así, $A \leq B$ se reduce simplemente a $AB' = 0$, esto es obvio, pero ¿qué hacemos con la igualdad, $A = B$?

Pues $A = B$ es, simultáneamente, $A \leq B$ y $B \leq A$. La primera da origen a que $AB' = 0$, mientras que la segunda da origen a que $BA' = 0$. Sumamos miembro a miembro, y tenemos que $AB' + A'B = 0$.

O sea, **podemos sustituir** $A = B$ **por** $AB' + A'B = 0$.

Además, y como acabamos de observar, **podemos reducir cualquier sistema de ecuaciones booleanas a un única ecuación** (lo acabamos de hacer, de hecho, en el ejemplo). Si tenemos un par de ecuaciones del tipo $A = 0$ y $B = 0$ (como acabamos de ver, toda ecuación puede reducirse a una igualdad con el segundo miembro igual a cero), podemos concluir que $A + B = 0$. Por si quedan dudas, tomamos la primera ecuación, $A = 0$, y sumamos la identidad $B = B$ a cada miembro, lo que nos deja $A + B = B$. Pero B es cero, así que $A + B = 0$. Por cierto, el sistema es dual, como casi todo en álgebra de Boole: si las ecuaciones fueran $A = 1$ y $B = 1$, entonces podríamos reducirlas a $AB = 1$.

Este procedimiento puede generalizarse para cualquier número de ecuaciones, por lo que es evidente que efectivamente es posible reducir cualquier sistema de ecuaciones booleanas a una única ecuación.

Lo que sí puede ocurrir es que un sistema de ecuaciones booleanas sea inconsistente, es decir, que no haya ningún valor posible de sus variables que cumpla todas las restricciones. Esto se puede ver fácilmente al reducir el sistema de ecuaciones original a una sola ecuación y luego aplicar reducciones… por ejemplo, el sistema de estas tres ecuaciones es inconsistente: $A' \leq B$; $A = B$; $A' + B' = 1$. No voy a decir por qué, para no estropearos el placer de descubrirlo vosotros mismos…

Y en el hipotético caso de que os quedéis con ganas de más, intentad demostrar si es inconsistente o no el sistema de tres ecuaciones booleanas siguiente:

$y + z' \leq x$; $x + w' = 1$; $(x + y'z)(x + w') = 0$

Veamos ahora un ejemplo muy característico, en forma de acertijo de tipo de los que podéis encontrar en los dominicales, debajo del crucigrama y al lado del Sudoku. Dice así:

« Del mítico reino de Thule no se sabe nada… ha estado sumido en la bruma del misterio años y años. Y más años. Pero cuatro *thulianos*, de turismo en un barco, naufragan frente a las costas de Galicia y, antes de perecer ahogados, dan alguna información sobre el reino de Thule. Esto es lo que cuentan:

« El náufrago número 1 dice que "*En el reino de Thule todo el mundo que lleva pluma roja, o está casado o tiene perro o ambas cosas*", y a continuación expira, con una expresión beatífica en su faz.

« El náufrago número 2 asegura que "*En el reino de Thule no hay ningún casado que no lleve pluma roja, a menos que sea brujo*", e inmediatamente fallece plácidamente.

« El náufrago número 3 afirma que "*Todos los thulianos propietarios de perro que llevan pluma roja están casados*", y muere tranquilamente al instante.

« Por fin, el náufrago número 4, entre estertores, asevera que "*No hay brujos en Thule*", y exhala su último suspiro con una sonrisa en su faz.

« ¿Qué información nos han dado, en realidad, estos cuatro náufragos? »

¿!!?

No, no me preguntéis por qué razón cuatro honrados y felices ciudadanos del mismísimo y misterioso reino de Thule, en su última hora, dan una información tan idiota. Es lo que tienen los acertijos booleanos…

Vamos con las ecuaciones que descifran los cuatro mensajes, teniendo en cuenta que los conjuntos básicos que aparecen en las declaraciones de los *thulianos* son:

R: *x* lleva una pluma roja.

P: *x* es propietario de un perro.

C: *x* está casado.

B: *x* es brujo.

1 – *En el reino de Thule todo el mundo que lleva pluma roja, o está casado o tiene perro o ambas cosas*, que se representa como $R \leq (C+P)$, o sea, $R(C+P)' = 0$, o sea, $RC'P' = 0$ (por la Ley de De Morgan).

2 – *En el reino de Thule no hay ningún casado que no lleve pluma roja, a menos que sea brujo*, lo que se representa como $CR' \leq B$, es decir, $CR'B' = 0$.

3 – *Todos los thulianos propietarios de perro que llevan pluma roja están casados*, que se representa como $PR \leq C$, o lo que es lo mismo, $PRC' = 0$.

4 – *No hay brujos en Thule*, que se representa (y ésta sí que es fácil) como $B = 0$.

Espero que, hasta aquí, no haya habido problema para entender de dónde salen estas ecuaciones.

Ahora sumamos todos los primeros miembros por un lado, y por el otro los segundos, que obviamente darán 0, y tenemos que: $RC'P' + CR'B' + PRC' + B = 0$.

Ahora se trata de simplificar un poco, a ver qué sale. Reordenando:

$RC'P' + [B + B'R'C] + RC'P = 0$

Ahora, los dos términos centrales $[B + B'R'C]$ podemos sustituirlos por $(B + R'C)$. Esto podemos hacerlo porque sabemos que $B = 0$ y por consiguiente $B' = 1$.

Entonces: $[B + B'R'C] = (B + R'C)$. Por tanto, reordenando, queda:

$RC'P' + RC'P + B + R'C = 0$; sacando factor común (por la propiedad distributiva) RC', queda:

$RC'(P' + P) + B + R'C = 0$, y como $P' + P = 1$, queda finalmente:

$RC' + R'C + B = 0$.

Ahora, en base a los términos de la ecuación, e igualando a cero cada uno de ellos (todos ellos son cero; si no, recordad, no podrían sumar cero) calculamos las relaciones "contenido por" ($\leq$). Recordemos que en álgebra de Boole, para que una suma de términos a+b+…c dé 0 es necesario que cada uno de los sumandos, a, b…c, sea 0, es decir, el conjunto vacío si hablamos de Conjuntos. Obviamente esto no es ni mucho menos cierto en álgebra numérica, la "normal", pero sí en la de Boole.

Entonces, como $RC' + R'C + B = 0$, podemos inferir que:

$RC' = 0$, luego $R \leq C$. Por otra parte $R'C = 0$, luego $C \leq R$. Y por fin, $B = 0$.

De las dos primeras deducimos que C contiene a R, pero también que R contiene a C… ergo $C = R$. Así que podemos por fin informar a nuestros superiores que:

$C = R$, es decir, traduciendo de nuevo al lenguaje cotidiano, ***todos los casados de Thule, y sólo los casados, llevan pluma roja***, y $B = 0$, o sea, ***no hay brujos en Thule***.

Ésta es, en definitiva, la información obtenida de los cuatro náufragos.

¿Dolor de cabeza? Psé, tampoco es para tanto, de veras.

Si os han quedado ganas de más, ahí va un clásico, que no voy a resolver de inmediato para no estropear el disfrute:

"En un tren viajan tres empleados de ferrocarriles, el jefe de tren, el maquinista y el camarero, de nombres White, Black y Brown, aunque no necesariamente en ese orden, y viajan también tres viajeros que tienen los mismos nombres, White, Black y Brown. Tenemos además los siguientes datos sobre ellos:

"El viajero Black vive en Washington, pero el camarero vive a mitad de camino entre Washington y New York, mientras que el viajero que se llama igual que el camarero vive en New York. El viajero Brown gana doscientos mil dólares justos al año. El empleado de ferrocarriles de nombre White gana siempre al ajedrez al jefe del tren. Uno de los viajeros es vecino del camarero y gana exactamente, hasta el último céntimo, el triple que él.

Y la pregunta es… **¿Cómo se llama el maquinista?**"

Aunque yo conozco este acertijo desde hace más de cuarenta años, incluso mucho antes de estudiar lógica, es relativamente fácil encontrar el acertijo y su solución en la Red. Recomiendo que no lo hagáis: con un poquito de paciencia y cuidado se resuelve bien, y es muy agradecido de resolver… ¡y siempre podéis torturar a algún amigo o pariente con el dichoso problema del maquinista!

En cualquier caso, en el Apéndice I, al final del libro tenéis la solución, pero exclusivamente para aquellos que queráis comprobar si habéis acertado...

Hasta aquí esta visión de la teoría de conjuntos con un poco de… lógica. En el próximo capítulo entraré, de una santa vez, en el Cálculo Proposicional, *antes simplista que incomprensible*.

V- El Cálculo Proposicional

Este libro se denomina "***Eso que llamamos Lógica***", creo que os habréis dado cuenta, sobre todo porque lo pone en el encabezamiento. Presuntuoso nombre, seguramente. Sin embargo, el caso es que hasta ahora poco hemos visto de *Lógica-Lógica*, no sé si me explico…

Sirva en mi descargo que nos hemos estado preparando para ello, pues hasta ahora hemos visto cómo es el álgebra de Boole con su Forma Normal Disyuntiva, luego entramos en la base del álgebra de Circuitos, y por fin, en el capítulo anterior vimos el álgebra de Conjuntos desde la óptica del álgebra de Boole… pero ya con una cierta aplicación a la resolución de problemas lógicos, lo que muchos de vosotros llamaríais "Acertijos", como el ínclito e incombustible "*¿Cómo se llama el maquinista*?", que os dejé de regalo en el capítulo anterior. Espero que su resolución no os haya destruido muchas neuronas.

Como sabéis, porque lo he dicho en cada capítulo, en realidad estoy siguiendo mis emborronados apuntes de la asignatura de "Metodología" de Segundo de Informática, curso 1973-74, impartido por José Cuena Bartolomé, desgraciadamente fallecido en 1999, uno de los mejores profesores que he tenido en mi vida.

Supongo que os habréis dado cuenta del método didáctico seguido por Pepe Cuena para desasnarnos en estas lógicas lides…

Empezó por la base teórica, el álgebra de Boole, luego nos explicó aplicaciones de la misma a problemas distintos (los circuitos eléctricos, los conjuntos), para llegar al cálculo proposicional. Iba paulatinamente definiendo los ladrillitos con los que se construirían los edificios cada vez más altos de la Lógica. No daba nada por sentado, sino que definía las cosas de lo particular a lo general…

Al final de este capítulo hallaréis unos párrafos explicando todo esto de forma más detallada, para que no os perdáis en lo que sigue. Leedlo y podréis seguir lo que queda de libro con facilidad… espero.

En fin, a estas alturas del curso (debía ser enero o febrero de 1974), Don José nos dijo que ya estaba bien de holgazanear, que ya iba siendo hora de entrar en materia, lógicamente, con la Lógica de verdad… y eso haremos en este capítulo dedicado al Cálculo Proposicional. Sigamos el razonamiento y las explicaciones de Don José…

Si estamos hablando de *Cálculo Proposicional*, es decir, Cálculo de *Proposiciones*, lo primero que habrá que definir es qué es para nosotros una *Proposición*: **Una frase a la que podemos atribuir, sin el menor asomo de duda, un valor de Verdad o de Falsedad.**

Atención: "*Podemos atribuir*" no indica que tengamos que saber exactamente si la frase es verdadera o falsa en un contexto, sino que tenemos los medios para saberlo. Por ejemplo, la frase "**Está lloviendo**" es una proposición a la que podemos asignar sin duda alguna un valor de verdad o falsedad… una vez que hayamos mirado por la ventana para ver lo que pasa fuera. Aunque hay veces que no sé yo… como decía un amigo mío sevillano, preguntado sobre el tiempo que hacía cierto día en Sevilla: "*Llover, llover, lo que se dice llover… llueve. Pero llover, llover, lo que se dice llover… pues ¡no llueve!* ¡Ah, qué maravillosa riqueza la del idioma español!

Entonces, frases del estilo "*La frase que está Vd. leyendo es falsa*" no es una proposición, pues no podemos asignarle un valor de verdad ni de falsedad ni de nada de nada, salvo quizá acordarnos amablemente de los ancestros del autor de la frase. En una palabra, el cálculo proposicional no es pertinente para tratar frases de esas tan comunes que cualquiera calificaría de "Verdades a Medias" o de "Medias Mentiras", que para el caso es lo mismo. No es, por lo tanto, una herramienta adecuada para analizar frases y afirmaciones de políticos, economistas, abogados… Si lo hacemos llegaremos continuamente a contradicciones y sinsentidos, así que mejor dejar el análisis de sus afirmaciones a avezados analistas y tertulianos varios, aunque me dé la sensación de que acertarían más leyendo los posos del té…

En fin, dejemos este espinoso tema para los citados avezados analistas y tertulianos que nos siguen, y centrémonos en el cálculo de proposiciones, de ésas de las que con todo rigor podemos estar seguros si son verdaderas o falsas…

Naturalmente, podemos unir varias proposiciones elementales (del estilo de "Llueve", "Soy agricultor" o "La Tierra se mueve") en una proposición compuesta, para lo que tenemos que unirlas mediante nexos.

Estos nexos posibles son ni más ni menos que las conjunciones copulativas y/o las disyuntivas. Resumiendo, mediante las conjunciones **Y** y **O**. Y también podemos negarlas ("No llueve"), mediante la partícula **NO**. Naturalmente, la conjunción **NI**, que la RAE define como copulativa también, en realidad es la suma de NO y de Y, así que no es atómica.

Podemos decir, por tanto, que "*Llueve Y NO me mojo*", o que "*Llueve O me mojo*". En este último caso, y que quede claro de aquí para siempre jamás, decir "Llueve O me mojo" quiere en realidad decir "Llueve O me mojo *O ambas cosas*". Si lo que queremos decir es que "O bien Llueve, o bien Me mojo, pero no simultáneamente", cosa que en cálculo proposicional y en la vida real es perfectamente posible, veremos más adelante que se trata de un "O lógico exclusivo", y no de un "O" normal. Lo digo porque en el lenguaje cotidiano se usa muchas veces el "O" con sentido exclusivo, y todo el mundo lo entiende así.

Por ejemplo, si alguien nos pregunta "¿Dónde quieres que vayamos, al cine o al teatro?", prácticamente todo el mundo entiende que ambas opciones son exclusivas: si vamos al cine queda descartado el teatro y viceversa.

Si a esa pregunta contestas "¡A ambos sitios!" lo más normal es que quien pregunta se quede sorprendido… no espera tal contestación (e incluso puede ser directamente imposible, si ambos son a la misma hora).

Repito para que quede claro, cristalino:

En cálculo proposicional, el "O" implica siempre "Uno u Otro *o Ambos a la vez*".

Veamos, pues, usando la ínclita Forma Normal Disyuntiva, que para algo la expliqué hace tres capítulos, cómo se comportan estas proposiciones compuestas (aquí, obviamente, **V** significa "Verdadero" y **F**, "Falso"):

Llueve	Me mojo	Llueve Y Me mojo
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Llueve	Me mojo	Llueve O Me mojo O Ambas
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A estas tablas tan monas se les denomina, de forma no muy imaginativa pero ciertamente descriptiva, "Tablas de Verdad", y serán muy importantes en todo lo que sigue.

Repito: **Tablas de Verdad.** Anotadlo en algún rinconcito del cerebro para que no se olvide. Las usaremos continuamente.

Desde luego, también **podemos negar una proposición**, dando origen a una proposición nueva, como "No llueve", que será verdadera cuando "Llueve" sea falsa y viceversa. Entonces la tabla de verdad de una negación sería algo tan tonto como:

Llueve	No llueve
V	F
F	V

En jerga "*cálculoproposicionalística*", las proposiciones genéricas no suelen designarse con las letras x, y, z… como es habitual en casi todas las ramas de la Matemática, sino más bien con las letras ***p, q, r…***.

Y por si fuera poco, en lugar de "Y", "O" o "NO", se usan los símbolos siguientes: $\wedge$**,** para el "y", $\vee$ para el "o", y $\neg$ para el "no", aunque también se puede usar el símbolo $\backsim$ para denotar la negación; de ambas formas podéis encontrarlo, aunque yo usaré normalmente el signo $\neg$**.**

Además, y ya puestos, podemos cambiar la representación de los propios valores posibles, asignando un "1" al valor Verdadero y un "0" al valor "Falso". En realidad no hemos cambiado nada, tan sólo la forma de escribirlo…

Sabiendo todo esto, podemos reescribir las tres tablas de verdad anteriores de la forma siguiente:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	$\neg p$
1	0
0	1

Obviamente, si tenemos varias proposiciones (frases) mezcladas con "o" e "y", algunas de ellas negadas y otras no, por muy complicada que sea la frase y muchos paréntesis que tenga, siempre podemos conocer el valor de verdad de la proposición completa en base a la explotación de la correspondiente tabla de verdad. Muy útiles las tablas de verdad, como veis.

Por ejemplo, sea la proposición $p \vee (q \wedge \neg r)$, de la que queremos establecer su tabla de verdad en función de los valores de las proposiciones elementales *p, q y r*. Para ello llamamos *s* al resultado de la proposición $\neg r$ (ahora la fórmula original será $p \vee (q \wedge s))$, y llamamos luego *t* al resultado de $(q \wedge s)$.

Construyendo como siempre, paso a paso, la tabla de verdad (que debido a que son tres las variables, tendrá ocho posibles combinaciones de valores, como supongo os habéis dado cuenta, pues son dos posibles estados elevado a tres), llegamos finalmente a los valores de verdad resultantes:

p	q	r	$s = (\neg r)$	$t = (q \wedge s)$	$p \vee t$	$p \vee (q \wedge \neg r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0

NOTA: Podemos obtener con toda sencillez la fórmula equivalente en Forma Normal Disyuntiva, creo que se ve claro analizando la tabla de verdad, ¿no es cierto?

Ahora queremos, por fin, conocer la tabla de verdad del *O lógico exclusivo*, al que llamaré $\oplus$ por llamarlo de alguna forma, pues así al menos es como se identifica el XOR en el diseño de puertas lógicas (XOR es el nombre de guerra del *Exclusive Or*, pero normalmente las instrucciones de ordenador que lo implementan se llaman "XOR", así que todo el mundo lo llama así) al que antes hice referencia (donde es cierta una proposición u otra, pero no ambas a la vez).

Dicha tabla de verdad del "Or Lógico Exclusivo" no es ni más ni menos que la siguiente:

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Y, por tanto, su fórmula resultante (en Forma Normal Disyuntiva) será la siguiente: $p \oplus q = p'q + pq'$.

Bueno, pues ahora sólo queda pensar un poco acerca de la naturaleza íntima de las proposiciones y las operaciones que las afectan. Mmmmm… veamos qué es lo que tenemos…

Un conjunto de elementos que pueden admitir cada uno sólo dos valores (0, 1), y dos operaciones cerradas que operan sobre ellos ($\wedge, \vee$)… Vaya, esto me suena.

¿No será esto, por una casualidad, un álgebra de Boole?

Vamos a comprobarlo inmediatamente; como ya sabéis, para ello habrá que verificar si todo este sistema cumple los axiomas de Huntington (1904). En el primer capítulo del libro conté cuáles eran estos axiomas. Volved allí si queréis refrescarlos.

Habría que verificar, sucesivamente, si las operaciones "Y" y "O" referidas a proposiciones que pueden ser Verdaderas o Falsas exclusivamente (ya sabéis, eso de las "Verdades a Medias" no funciona muy bien en Cálculo Proposicional) cumplen los cuatro axiomas.

No voy a detallar paso a paso las demostraciones, dejando al lector, si lo desea, probar los axiomas uno a uno, demostrando si se cumplen o no. Para ello utilizará seguramente las correspondientes tablas de verdad que tan útiles se nos muestran…

Comprobémoslo, pues:

Uno: **¿Son las operaciones "Y" y "O" conmutativas?** Pues sí, lo son. Intuitivamente, parece que igual da decir "Llueve o Me mojo" que "Me mojo o Llueve", y lo mismo ocurre con el "y"…

Dos: **¿Tienen las operaciones un elemento neutro?** Evidentemente. El valor "Falso" (0) es el elemento neutro del "O" ("Llueve O Cualquier Cosa Falsa" es equivalente a "Llueve", pues tiene su misma tabla de verdad), mientras que el valor "Verdadero" (1) es el elemento neutro del "Y" ("Llueve Y Cualquier Cosa Verdadera" es equivalente a "Llueve", pues también tiene su misma tabla de verdad).

A estos efectos, "*Cualquier Cosa Falsa*" sería una proposición que resulte siempre falsa, como por ejemplo 1=0 (y veremos más adelante que se llama "Contradicción"), mientras que "*Cualquier Cosa Verdadera*" sería una proposición que resulte en todo caso verdadera, como por ejemplo 1=1 (y veremos más adelante que se llama "Tautología").

Tres: **¿Cumplen las operaciones la propiedad distributiva?** Esto es menos evidente, pero si construís las tablas de verdad, veréis que, efectivamente, se cumple a rajatabla la propiedad distributiva, tanto del "Y" respecto del "O", como del "O" respecto del "Y". Hacedlo si no me creéis.

Cuatro: **¿Tiene cada elemento un complementario?** Esto sí que es sencillo: al haber sólo dos valores posibles, es sencillo ver que "Verdadero" es el complementario (el contrario) de "Falso", y viceversa.

Truco para descreídos: cuando hablé de circuitos eléctricos en el tercer capítulo del libro, sí que demostré con santa paciencia todos y cada uno de los dichosos axiomas. Si vais allí y cambiáis "Cerrado" por "Verdadero", y "Abierto" por "Falso", y además cambiáis "En Serie" por "Y" y "En Paralelo" por "O"... pues ya lo tenéis todo demostrado. Y el vago de mí, de paso, se ahorra escribirlo todo de nuevo. O sea que, en realidad, lo que ocurre es que las estructuras matemáticas subyacentes a la Lógica Proposicional son las mismas que las de los Circuitos eléctricos. Ufff, ahora que lo pienso... ¿A ver si va a ser verdad que al final las máquinas dominarán el mundo…?

En fin, sigamos a lo nuestro.

Las proposiciones, con la negación, el "O" y el "Y", cumplen los cuatro axiomas de Huntington. Por lo tanto, Señoras y Señores, **el cálculo proposicional es un álgebra de Boole**. Listo.

Es decir: Todos los artilugios, teoremas y procedimientos que funcionan para un álgebra de Boole funcionan también en Cálculo Proposicional.

Hala! Ya sabemos bucear entre Verdades y Mentiras…

Ya os podéis imaginar que todo esto es vital para poder diseñar y escribir programas eficientemente.

Efectivamente, todo aquél que haya escrito un programa en su vida (y eso incluye haber metido alguna fórmula medianamente compleja en una hoja electrónica) ha tenido que lidiar con el famoso "**IF**". El "Si" condicional que gobierna el flujo de los programas.

Muchas veces sirve escribir el "IF" consultando una única proposición. Por ejemplo, en un cajero automático: Si el saldo de la cuenta es menor que el dinero que el cliente desea llevarse, denegar la operación. Fácil

Pero es muy normal tener que lidiar con proposiciones complejas que hay que evaluar para decidir por dónde debe seguir el programa…

Verbigracia: *Si el cliente es nuevo y tiene una marca de captación mayor de 7, o, siendo antiguo, tiene un saldo superior a x Euros y no tiene ninguna marca de "Cliente especial" siempre que el director de la sucursal no le haya calificado como de tipo 1 ó 3, o bien el director de la regional le haya calificado como de tipo 6, pero no de tipo 9, y además está como titular en una cuenta en la que alguno de los otros titulares sea un cliente preferente… entonces le concedemos el préstamo*.

(!!)

Estaréis pensando… ¡*pero qué condiciones tan retorcidas se ha sacado de la manga el amigo Macluskey*…! Pues no, amigos, no.

Cosas mucho más complicadas todavía he tenido que escribir a lo largo de mi vida profesional… Y lo peor no es que esa condición sea alambicada, no: lo peor es que ¡**Hay que programarla**!, es decir, hay que escribir un programa que refleje fielmente esa condición de negocio.

Y, atención, no sólo tiene que reflejar con fidelidad la condición de negocio, sino que tiene que hacerlo de la manera más simple y eficaz posible. Es más, de éstas habrá muchas, pero muchas, en cualquier Sistema que se precie…

¿**Os dais cuenta ahora de lo importante que resulta conocer el Cálculo Proposicional para poder hacer esto correctamente**?

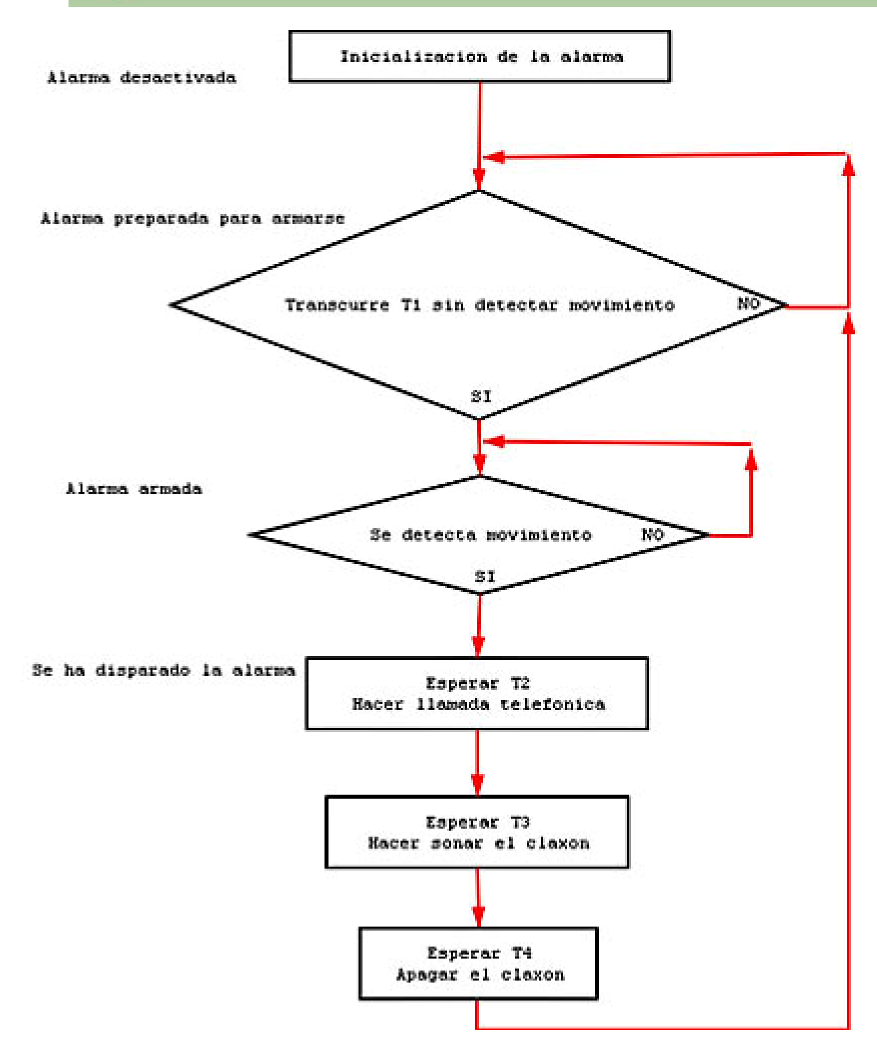
La de programas que han fallado miserablemente por no tener correctamente programado el "*if*" correspondiente… Éste es, con gran diferencia, el principal motivo de fallo de los programas de todas partes: un *if* mal programado.

El verbo inglés "**IF**" (*IF* significa "*Si*", por si alguno no anda muy versado en la lengua de Shakespeare) es el usado universalmente para designar la instrucción condicional; luego, según el lenguaje de programación usado, se escriben de una forma u otra tanto las comparaciones que forman las proposiciones individuales, como las uniones entre ellas: **Y** (que casi siempre se pone en inglés: AND), **O** (lo mismo: OR) o **NO** (NOT).

Así, en el ejemplo anterior las condiciones a probar serían: Cliente Nuevo=SI; Marca de Captación>7; Saldo>X; Tipo de Cliente=1; etc, etc, etc.

En Cobol, por ejemplo, se usan en inglés tal cual (AND, OR, NOT), lo mismo que en otros muchos lenguajes, como en SQL, pero en C, por ejemplo, igual que en Java o en PHP, se usa && para el Y, || para el O y ! para el NOT (que ya son ganas de fastidiar, con lo sencillo que es usar AND, OR y NOT), y en Excel, versión española, se usa O(a,b,…), Y(a,b,…) y NO(a), y así.

Obviamente, la misma explicación sirve para las condiciones de terminación de los bucles DO-UNTIL o DO-WHILE, así que me ahorro seguir.



Un ejemplo: el Funcionamiento de una Alarma

Además, hoy en día hay muchísimos componentes y mecanismos industriales (como la alarma que funciona según el diagrama de más arriba) que tienen empotrado un cierto software… un software que casi siempre está todo llenito de IF's…

Bueno, pues ahora ya sabéis que, **como todo esto es un álgebra de Boole, podéis aplicar todas sus reglas** (que son las mismas del Cálculo Proposicional) **para simplificar el contenido del *if*,** o bien usar su FND para tratar de comprender uno que ya está programado.

Como bien dice nuestro amigo J, «*Ay, si me hubieran dado un mísero euro por cada vez que me he encontrado un IF kilométrico (programado, naturalmente, por algún otro), que siempre era "true" (verdadero) o "false" (falso, claro), o bien que se podía simplificar a uno mucho más sencillo*»… Lo malo es que nadie da un euro por estas cosas, salvo quizá en algún "*reality*" de la tele. Y no estamos dispuestos a ir a ninguno.

En el Apéndice III encontraréis, además, el artículo que Javier "J" Sedano escribió en la serie de El Cedazo para explicar cómo funcionan las puertas lógicas que configuran tu ordenador, sin las que tanto IF, bien o mal programado, no valdría para nada.

Ya para acabar, dije antes que, como el Cálculo Proposicional forma un álgebra de Boole, armados con él ya sabemos bucear cómodamente entre Verdades y Mentiras… pero no. No del todo.

Los humanos somos tan raros hablando y formulando frases, que hay que profundizar un poco más para poder usar esta herramienta en proposiciones formales. Pero eso lo iremos viendo en siguientes capítulos, que éste es ya largo. Para empezar, hablaremos de la implicación lógica, la dichosa y a priori tan poco comprendida implicación lógica. A ver si, *antes simplista que incomprensible*, consigo explicarme y que se entienda tan "enrevesada" cosa, y por qué es como es y no de otra manera…

Pero eso lo veremos en el siguiente capítulo.

NOTA IMPORTANTE

… para poder seguir el resto del libro sin perderse.

Dije al principio del capítulo que el método seguido por José Cuena para enseñarnos Lógica, dentro de su asignatura de "Metodología", se basaba en introducir poco a poco los conceptos teóricos de lo particular a lo general, de tal modo que cada concepto explicado tuviera siempre otros conceptos en los que asentarse. En un símil del mundo de la construcción, primero definía cómo fabricar un ladrillo, luego cómo construir una pared con esos ladrillos, luego cómo construir una habitación a base de paredes, una casa a base de habitaciones, una urbanización a base de casas…

Este método se denomina en la jerga informática "*bottom-up*", de abajo arriba, de lo particular a lo general, en contraposición al método "*top-down*", de arriba abajo, que funciona exactamente al revés: de lo general a lo particular. Ambos métodos funcionan, claro, pero bajo mi modestísimo punto de vista, en la enseñanza de cualquier tipo de temario se debe preferir el método "bottom-up". Por ejemplo, antes de enseñar al niño a leer palabras completas se le enseña a leer letras individuales, y antes de leer frases, se le enseña a leer palabras. Y antes de enseñar a multiplicar, se enseña a sumar…

Todo esto puede parecer evidente, obvio, casi de Perogrullo. Pero resulta que, para todo lo que viene a continuación, para la exposición de los intríngulis de la Lógica, este sistema "bottom-up" quizá podría resultar contraproducente, puede dificultar la comprensión de lo expuesto en cada momento. No es que falte nada, que no falta, está todo, todo, lo aseguro, pero… no sé cómo decirlo, *descolocado*, *desordenado*… al menos desde cierto punto de vista.

Me he dado cuenta de ello, poco a poco, en los intensos debates que hemos mantenido Pedro, J y yo durante la revisión de los artículos de la serie mientras se publicaban en El Cedazo. Ellos ponían pegas, porque no entendían ni las explicaciones ni los ejemplos, no porque estuvieran mal, sino porque les faltaban cosas obvias para ellos que yo (o sea, Pepe Cuena) estaba pasando por alto… Luego, al revisar el siguiente capítulo, decían: "*Ah!, claro, es que lo que yo echaba en falta en el capítulo x, lo explicas luego en el capítulo x+1, o en el x+2…*".

Disculpadme: No puedo ser mucho más preciso al respecto si no quiero destripar lo que queda de libro; sólo contaros que estos malosentendidos son debidos fundamentalmente, según mi entender, a la diferencia entre su formación (de J y de Pedro) y la mía: mientras su enorme formación es de corte marcadamente científico, la escasa mía es más bien de corte generalista: ellos echaban en falta, *necesitaban* para entender bien los conceptos que las cosas se expusieran de un modo diferente, mejor, *en un orden diferente* al que se exponen en este libro.

Y hasta aquí puedo leer… de momento.

En fin, tras todos estos intensos intercambios, he modificado sustancialmente los capítulos restantes para, sin perder esa orientación "bottom-up" ni destripar nada de lo que quede ni usar nada que no haya sido explicado, ir dando al lector las armas para ir siguiendo la explicación y que no se pierda en disquisiciones que serán resueltas más adelante.

En una palabra: **no voy a dar por sentado nada**. Nada de nada. Voy a ir avanzando pasito a pasito por el proceloso *mundo lógico* hasta llegar a su glorioso final. Pero, por favor, *creedme*, ¡**no os impacientéis**! Cuando terminéis el libro, todo lo necesario para razonar e inferir cosas a partir de otras estarán explicadas, desde lo particular a lo general, "bottom-up". Nada faltará, el círculo estará cerrado, todo encajará.

Como si fuera una buena novela de suspense, por favor, seguid la exposición, aceptar las cosas como las iré contando y en el orden en que las iré contando, y el final seguro que os satisfará. Seguro.

Pero, permitidme que insista…

¡**Paciencia**!

VI- La escurridiza Implicación Lógica

En el capítulo anterior de este libro sobre Lógica, que estoy escribiendo sobre los añejos apuntes de la asignatura de "*Metodología*" de mi virtualmente olvidado Segundo de Informática, allá por 1973, impartida por Don José Cuena Bartolomé, vimos cómo las proposiciones (frases a las que sin duda alguna podemos asignar un valor de verdad o de falsedad), junto con las operaciones "O" e "Y" formaban un álgebra de Boole.

Una vez fijado este extremo, ya podemos operar tranquilamente con proposiciones para ver qué hay y qué no en cada una de ellas. Una vez que tenemos una frase o un conjunto de frases, podemos construir su Forma Normal Disyuntiva, tal como vimos en el segundo capítulo del libro, y determinar cuál es su fórmula final, aplicando únicamente los axiomas y teoremas ya demostrados para el álgebra de Boole, aunque hablando de proposiciones decimos más bien "tablas de verdad".

Esto está muy bien para proposiciones simples. Ya podemos decir "Llueve", "O no llueve o voy al cine", "Soy español y me gusta el atletismo y el fútbol pero no el béisbol"… y cosas así, y podemos saber si la proposición, por muy compleja que sea, es o no cierta en función de los valores de verdad de cada proposición individual, valores que podemos determinar mirando, por ejemplo, si la calle está mojada o no. Pero esto no es suficiente para poder comunicarnos. De ninguna manera. Porque, claro…

Si habláramos así, entonces esta frase sería imposible.

Necesitamos algo más. Y ese algo más es, como poco, la implicación lógica. La escurridiza y tantas veces discutida implicación lógica. *Escurridiza*, porque cuando parece que uno por fin ha entendido bien el concepto, de pronto se topa con un caso que parece desbaratar lo entendido. Y *discutida*… no os podéis imaginar la de amigables discusiones que propicia debatir sobre ella.

A intentar desbrozarla dedicaré este capítulo, siguiendo las explicaciones de Pepe Cuena en aquel lejanísimo (y convulso) enero o febrero de 1974.

Bien, nos quedamos en que… *Si habláramos así, entonces esta frase sería imposible.*

Analicemos la frase, aunque, por comodidad, le cambiaremos el tiempo verbal al más sencillo presente de indicativo: ***Si hablamos así, entonces esta frase es imposible***.

Pues esto es lo que se llama una **implicación lógica** (su nombre técnico es "*implicación material*", pero en informática, al menos, todo el mundo la conoce como "implicación", a secas), que se representa como $p \Longrightarrow q$.

En este caso, *p* es la proposición "*hablamos así*", a la que se conoce como "antecedente", y *q* es la proposición "*esta frase es imposible*", conocida como "consecuente", y el "entonces" se representa con la flecha, obviamente. Esta implicación $p \Longrightarrow q$ nos dice intuitivamente que, si la primera frase es cierta, entonces la segunda también debe serlo. Ya es curioso que para definir una implicación lógica estemos usando precisamente una implicación lógica… forman parte natural del lenguaje y todo el mundo las entiende sin más complicaciones. Pero cuando se formalizan… entonces la cosa ya no es tan sencilla, ya veréis.

En este punto hay que elegir entre dos aproximaciones didácticas posibles:

- Definir la implicación lógica, escribiendo su tabla de verdad y su formulación, y usamos con suficiencia el argumento de autoridad: "*esto es así… y punto*" (que es una forma ligeramente maleducada de decir que "es así por definición"). Luego nos ponemos a analizarla… y descubrimos que… ¡qué casualidad!, representa bastante bien lo que queremos decir cuando hablamos.
- Pensamos en la frase anterior escrita en español corriente (*Si habláramos así, esta frase sería imposible)* y pensamos…"*Mmmm…* ¿cómo podríamos representar esto matemáticamente?"… y recorrer juntos el camino hasta llegar a su tabla de verdad y, por consiguiente, a su formulación.

Yo prefiero la segunda aproximación, que es también la seguida por José Cuena en aquellos lejanos tiempos del cuplé, porque

nos ayuda a desbrozar poco a poco los porqués de la implicación lógica, no sólo su fórmula desnuda. En una palabra, esa aproximación es la que vamos a seguir de aquí en adelante.

Dicho lo cual, voy a cambiar la frase de ejemplo, que ha servido para introducir el concepto de la forma elegante a la par que ingeniosa que caracteriza mis escritos (!!), usando una frase bastante más sencilla y adecuada para explicar el concepto:

Si estornudo, cierro los ojos.

O sea, cuando *YO* estornudo, *YO* cierro los ojos.

Fijaos que no me estoy refiriendo a lo que te ocurra a ti, querido y sufrido lector, ni tampoco al resto de la humanidad, sino exclusivamente al caso particular de lo que me ocurre a mí al estornudar… esto es importante para más adelante, pero de momento lo dejaremos aquí. Ya volveremos a estas cuestiones cuando sea oportuno.

Bien, el quid del asunto reside no en determinar la certeza o falsedad de las frases individuales que componen la implicación, sino en **cómo determinar la certeza o falsedad de *la propia implicación lógica* en función de los valores de verdad o falsedad de las dos proposiciones que la forman**: el antecedente (*p*) y el consecuente (*q*).

Por favor, releed el párrafo anterior… volveremos a él una y otra vez.

Esto quiere decir ni más ni menos lo siguiente: Si teníamos una frase compuesta por un conjunto de proposiciones elementales unidas como sea, con "NO", "O" e "Y" como nos venga en gana, y con tantos paréntesis como nos venga en gana, podíamos fácilmente averiguar si la frase compuesta era verdadera o falsa en función de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones elementales.

Pues ahora lo que debemos hacer es *determinar el valor de verdad o falsedad de la frase que contiene la implicación* según sean verdaderas o falsas *p* y *q*, las dos proposiciones implicadas.

Insisto: el valor de certeza o falsedad **de la propia implicación en sí**. Que no deja de ser una frase, una mera proposición más compuesta a su vez por un par de proposiciones elementales.

Bueno, en realidad las proposiciones p y q no tienen por qué ser *elementales-elementales*, no sé si me explico. Tanto *p* como *q* pueden ser proposiciones tan complicadas como queramos, llenas de paréntesis y de *Oes* y de *Yes* y de *NOes*, e incluso de otras implicaciones, si os lo estabais preguntando: al final del capítulo espero que ya no os asuste tal cosa. Como ya sabemos determinar sin problemas el valor de verdad de esas proposiciones compuestas en función de los valores de verdad de las proposiciones elementales que las forman, para lo que aquí nos interesa son eso y nada más: proposiciones elementales.

Sentado esto, introduciremos ahora otro ejemplo de la realidad cotidiana; a lo largo del capítulo iremos haciendo referencia a uno u otro ejemplo para ver cómo se comporta el uno o el otro ante la prueba de la verdad… de la tabla de verdad, queremos decir.

Imaginemos a un político cualquiera de un país cualquiera que, en su programa electoral, hace la siguiente afirmación: "*Si gano la elección, construiré un hospital*". Seguramente esta frase (o alguna otra equivalente) os sonará de algo, igual habéis escuchado cosas similares a alguien en la tele o en un mitin o donde sea…

Podríamos representar esta promesa electoral finamente como *Político gana la elección* $\Longrightarrow$ *Hospital Construido.* Analicemos qué pasa con esa frase.

Si, en el momento de leer el programa electoral, miramos el sitio donde se supone que se construiría el dichoso hospital, vemos que no hay nada allí. Es un barrizal lleno de excrementos de perro. No hay hospital que valga, luego podemos concluir que *Hospital Construido=0*, o sea, la proposición "Hay un hospital construido en tal zona" es falsa. *De momento* es falsa, para ser precisos.

Como la elección aún no se ha producido, es evidente también que *Político gana la elección=0*; de momento la proposición "El político tal ganó la elección" es falsa también, no puede ser cierta entre otras cosas porque todavía no se ha producido la dichosa elección.

Pero… daros cuenta que no es eso lo que queremos conocer, en realidad. La frase que queremos saber si es cierta o falsa no es ninguna de esas dos, que ya sabemos de antemano que, de momento, son falsas, sino, recordad,"***Si gano la elección, construiré un hospital***", que es la promesa que, entre otras, se supone, contiene su programa electoral. Esa frase, esa promesa concreta, en esa elección concreta… ¿**Es verdadera o es falsa**?

Fijaos bien que, en el fondo, lo que de verdad es importante aquí, lo que estamos decidiendo, no es si la frase dichosa es verdadera o falsa, sino que en realidad **estamos determinando si el que la dice es un tipo que dice la verdad o que miente al respecto**.

Si el tipo en cuestión dice la verdad entonces es un tipo honrado que cumple lo que promete, por lo que entonces seguro que su promesa electoral es verdadera también; si gana la elección, tendremos hospital, fijo. En cambio, si el tipo es un falsario, un mentiroso, si nos ha engañado, en definitiva, entonces, por mucho que salga elegido, no tendremos hospital nos pongamos como nos pongamos: la frase en sí, su promesa, *esa* promesa, es falsa de toda falsedad.

Lo malo es que no podremos demostrárselo hasta dentro de algún añito. Y para acabarlo de complicar… ¡también puede resultar que no salga elegido!

Ojo, que **no estoy prejuzgando nada**. No estoy diciendo que "*todos los políticos mienten siempre*", ni tampoco que "*todos los políticos dicen siempre la verdad*". Ése no es el caso, y de hecho estaréis de acuerdo en que con toda seguridad ambas frases universales, aplicadas a la totalidad de la clase política, son falsas.

Me estoy refiriendo al caso particular de un político concreto que hace una promesa concreta en un lugar concreto y para una elección concreta (es decir, en un momento temporal concreto). Y tenemos que decidir si ese político miente o no al prometer *la promesa que analizamos* (que construirá un hospital si gana la elección), ni siquiera en saber si *todas* sus promesas son verdaderas o falsas…

Ésa sería otra historia, pues habría que analizar una por una su certidumbre o falsedad: "si gano la elección: bajaré el paro; subiré los subsidios y los sueldos; eliminaré los impuestos; incrementaré el número de colegios, traeré a Lady Gaga a las fiestas del pueblo, etc, etc").

Aquí y ahora, en este nuestro ejemplo, intentaremos exclusivamente saber qué va a pasar con nuestro hospital…

Bien, dejemos por un rato a nuestro político y su promesa y sigamos con la exposición.

La implicación lógica en sí, por tanto, no es más que una frase que contiene un par de proposiciones elementales. Sólo eso, nada más. En cálculo proposicional, la determinación de tal cosa (la certeza o falsedad de una proposición lógica) se hacía construyendo la tabla de verdad… ¿recordáis?

Podemos, efectivamente, construir con facilidad esa tabla de verdad de la implicación lógica teniendo en cuenta, como siempre, qué ocurre en los diferentes posibles estados de verdad de las dos variables involucradas *p* y *q*, ¿no? En nuestro ejemplo primigenio, el de "*Si estornudo, cierro los ojos*": "*estornudo*", que es *p*, es el antecedente; y "*cierro los ojos*", que es *q*, *es* el consecuente.

Construir esa tabla de verdad es fácil. Total, si son solamente cuatro casos de nada…

Vamos allá:

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	**¿?**
F	F	**¿?**

Vaya, ya estamos en la mata… (expresión muy española para decir: ya nos hemos metido en el lío).

Veámoslo línea a línea. Los dos primeros casos son fáciles: siempre que *p* (*"estornudo"*) es Verdadero, podemos discernir claramente si la propia implicación es Verdadera o Falsa en función del valor de *q* (*"cierro los ojos"*). Así, en la primera línea, si cuando estornudo efectivamente cierro los ojos, podemos concluir que la implicación lógica es cierta. Y en la segunda línea, si cuando estornudo no cierro los ojos, podemos decidir que la implicación en sí es decididamente falsa. Hasta aquí de acuerdo.

Pero… **¿Qué pasa si no estornudo?** ¿Cómo resolvemos las dos últimas líneas? ¿Qué podemos decir sobre el valor de verdad de la propia implicación lógica, *"si p entonces q"*, si el antecedente *p* es falso?

Buena pregunta, pardiez.

¿Qué hacemos en ese caso?

Intentemos representar esta situación recurriendo al álgebra de Conjuntos, de la forma que vimos en el capítulo correspondiente del libro, a ver si así se nos ocurre algo.

En el Conjunto Universal de situaciones aplicable (no sé, ¿los milisegundos que estoy vivo, quizá?), podemos establecer dos posibles conjuntos: el de aquellas situaciones en las que *estornudo*, y el de aquellas situaciones en las que *cierro los ojos*.

Estos dos conjuntos de situaciones pueden, en principio, ser independientes uno del otro, por lo que podemos representarlos de forma genérica, por ejemplo representando en color amarillo las situaciones en que "cierro los ojos", y en color azul las situaciones en que "estornudo" (y en verde, aquellas en que simultáneamente estornudo y cierro los ojos). Por fin, en gris quedan las situaciones en que ni una cosa, ni la otra.

El dibujo podría ser algo similar al siguiente:

Ni Estornudo Ni Cierro los Ojos
Cierro los Ojos
Estornudo Y
Cierro los Ojos
Estornudo

Si estornudo, Cierro los Ojos. Situación genérica: Todo es posible.

En esta situación genérica puede haber casos en que "estornudo" y "cierro los ojos" sin relación alguna entre ambos conjuntos; todas las situaciones de estornudos y parpadeos son posibles. Puede que estornude y yo no cierre los ojos (la zona azul), o que cierre los ojos sin estornudar (la zona amarilla), o que estornude y realmente cierre los ojos (la zona verde), o que incluso ni estornude ni cierre los ojos (la zona gris).

Ahora bien, para que la proposición de marras, "*Si estornudo, cierro los ojos*", sea verdadera, lo que estamos diciendo en realidad es que el conjunto de situaciones en que *estornudo* deben ser **también** situaciones en las que *cierro los ojos*, puesto que no debe haber ninguna situación en que al estornudar no cierre yo los ojos.

Si hubiera alguna situación en que, estornudando, no cerrara yo los ojos (situación representada por la zona azul del dibujo de arriba), entonces la implicación, la frase "*Si estornudo, cierro los ojos*", sería falsa. Bastaría un único contraejemplo, una única vez que me ocurriera tal cosa, para falsar la implicación.

Para que sea verdadera, pues, el rectángulo azul no debería existir, debería ser el conjunto vacío…

Resumiendo, para que eso ocurra, para que la implicación sea verdadera, es necesario que **el conjunto de situaciones en que *estornudo* esté contenido en el conjunto de aquellas situaciones en las que *cierro los ojos*, es decir, como decíamos ayer,** $ESTORNUDO \leq CIERROLOSOJOS$ **.**

Luego para que la implicación en sí sea válida, o mejor dicho, verdadera, el dibujo de los conjuntos tiene que ser el siguiente:



Si Estornudo, Cierro los Ojos. Resultado de la implicación.

Lo que *implica* (je, je, he aquí nuevamente la *implicación* en el lenguaje natural) que, además de las situaciones en que *estornudo* y simultáneamente *cierro los ojos* (la zona verde), pueden existir también situaciones en que e*stornudando*, *cierro los ojos* de todos modos (la zona amarilla), o bien puede haber situaciones en que no *cierro los ojos* de ninguna manera (la zona gris clarita), donde, desde luego, tampoco estoy estornudando. Ambas situaciones ("*no estornudo y cierro los ojos*", y "*no estornudo y no cierro lo ojos*"; la primera ocurre cuando estoy durmiendo, por ejemplo, y la segunda es exactamente el estado en que estoy ahora, escribiendo estas líneas) son perfectamente compatibles con la veracidad de la frasecita dichosa: "*Si estornudo, cierro los ojos*".

Relee ahora el último párrafo, por favor. ¿Te das cuentas de que lo que hemos descrito en él, en *roman paladino*, son las dos últimas líneas de nuestra tabla de verdad? Sí, las que tenían una interrogación en el resultado.

Ninguna de ellas nos hace sospechar que la frase original, la implicación lógica de marras: $Estornudo \Longrightarrow CierrolosOjos$ sea falsa, en definitiva.

O sea, que no es falsa.

Luego es verdadera.

El valor de la implicación lógica en estos dos últimos casos es "**V**". Es cierta.

Cuando la proposición antecedente, *p*, es falsa, la implicación lógica es verdadera. Si no estoy estornudando, no hay forma de sacar como conclusión que "*Si estornudo cierro los ojos*" sea una proposición falsa, tanto si efectivamente los cierro como si no.

Como curiosidad… **al parecer esto es cierto para todos**, no sólo para mí.

A los humanos (a no ser que tengamos alguna enfermedad rara o algún superpoder) nos resulta imposible estornudar sin cerrar los ojos. Dicen los expertos que el estornudo es un acto reflejo que implica el movimiento concertado e irrefrenable de centenares de músculos de todo el cuerpo, entre ellos, los de los párpados… Desde luego, al menos, siempre que *yo* lo he intentando he sido incapaz de todo punto de mantener los ojos abiertos al estornudar. Ni una vez.

Por lo tanto, aunque hasta ahora nuestra estereotipada frase "Si estornudo, entonces cierro los ojos" se refería exclusivamente a mi caso particular, puesto que es una frase en primera persona, como parece que se trata de un caso general rige para todo el mundo, podemos reescribirla de modo que afecte a la totalidad del género humano: "**Si un hombre estornuda, cierra los ojos**". Acabamos de convertir una **observación particular** que afecta a un individuo concreto (yo) en una Ley, una **observación universal** que afecta a la totalidad de la humanidad.

Más adelante veremos cómo afecta esta generalización a la determinación del valor de verdad de la implicación lógica, es decir, qué diferencias conlleva que la implicación lógica se refiera a un caso particular o a uno universal… Cada cosa a su tiempo.

Cambiando de ejemplo, en el de la promesa electoral, que, recordad, es otra proposición particular, puesto que se refiere a la promesa concreta de un político concreto, si el político que la hizo ganó efectivamente la elección y construyó el hospital, es claro que su promesa era cierta y no nos engañó. Ahora bien, si sí ganó la elección pero durante su mandato, sorprendentemente, no se construyó el hospital, entonces el tipo nos mintió: su promesa era falsa.

Pero si no ganó la elección puede que el hospital se construyera al fin (porque el candidato que salió elegido de todos modos lo construyó), o puede que no se construyera… *en ambos casos no podemos asegurar que la promesa electoral fuera falsa*, puesto que al no cumplirse el antecedente (el político no ganó la elección), no tuvo los medios para cumplir el consecuente (construir el hospital).

Y si la promesa no es falsa, es que es verdadera. No hay vuelta de hoja.

En español decimos que "*le otorgamos el beneficio de la duda*". Recordad siempre que, al juzgar la certeza o falsedad de una implicación lógica, en realidad estamos normalmente juzgando "por elevación" la condición de honrado o de mentiroso de la persona que la hace. Por esta razón es tan habitual escuchar promesas electorales del estilo de "*Si gano la elección, haré… lo que hay que hacer*". Ole con ole y ole. Eso sí que es concreción…

Vale. Tras toda esta diatriba, resulta que **la tabla de verdad de la implicación lógica es, por fin, la siguiente:**

p	**q**	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	**V**
F	F	**V**

Por tanto podemos definir la fórmula matemática de la implicación lógica, simplemente creando la Forma Normal Disyuntiva a partir de su tabla de verdad, es decir:

$p \Longrightarrow q = pq + p'q + p'q'$

Simplificando,

$p \implies q = pq + p'(q + q') =$

$pq + p' =$

$pq + p'(1 + q) =$

$pq + p' + p'q =$

$p' + q(p + p') =$

$p' + q.$

Ergo $p \implies q = p' + q$, o bien, en la notación propia del cálculo proposicional: $p \implies q = \neg p \vee q$.

Es decir, **el antecedente implicando el consecuente es igual a la disyunción de la negación del antecedente con el consecuente**.

O sea, una implicación es cierta bien cuando el consecuente (*q*) es cierto, bien cuando el antecedente (*p*) es falso, o ambas cosas. Y no hay más.

Es la base, **esto es la base**. Las implicaciones lógicas son fundamentales para el cálculo proposicional, el cálculo de predicados y el desarrollo mismo de la ciencia… No puede haber duda alguna al respecto.

Con estos mimbres, es fácil averiguar cómo es la *doble implicación*, en la que ocurre simultáneamente que $p \implies q$ y $q \implies p$, o, expresado formalmente $p \implies q \wedge q \implies p$. Esto se suele representar como $p \iff q$, así con doble flecha. En términos matemáticos se dice que algo (*p*) ocurre *si y sólo si* ocurre esto otro (*q*). Y viceversa.

Sabiendo cómo se representa la implicación $p \implies q$, podemos fácilmente encontrar la tabla de verdad de la doble implicación, escribiendo la tabla de verdad de cada implicación y la de su conjunción ($\wedge$):

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

En Forma Normal Disyuntiva, será, pues, $p \Longleftrightarrow q = pq + p'q'$.

De todos modos, no hacía falta escribir la tabla de verdad para llegar a esa conclusión. Conociendo que $p \Longrightarrow q$ es $p' + q$, como hemos visto hace un poquito, y que por tanto $q \Longrightarrow p$ será $q' + p$… determinar cómo es $p \Longleftrightarrow q$ es tan sencillo como hacer la reducción de $(p' + q)(q' + p)$ (que, por cierto, es el resultado de escribir la misma tabla en Forma Normal *Conjuntiva*, en vez de Disyuntiva), y listo.

Hacedlo, si os place, para que comprobéis que no me he equivocado. Que espero que no…

Ahora que ya sabemos cómo es la tabla de verdad (y la fórmula, claro) de la implicación lógica, incluso la de la doble implicación, nos será muy sencillo saber cómo discernir si una frase condicional (o sea, una implicación) es cierta o no. Basta con fijarse si simultáneamente el antecedente p es cierto y el consecuente q falso. O sea, fijarse en que se cumple $pq' = 1$.

Si esto ocurre, hemos encontrado un contraejemplo, y la implicación es falsa. Pero si no hemos encontrado un contraejemplo, en todos los otros casos, es cierta. Por raro que nos suene. Cierta como que el hierro tiene 26 electrones o que la Tierra gira alrededor del Sol.

Vamos ahora a analizar brevemente algunos ejemplos de frases que se usan cotidianamente:

"**Si llueve, me mojaré**". Frase que decimos muchos cuando vemos que se acerca un nublado. ¿Es cierta o es falsa?

Mmmm… pues… depende. Puede que llueva, me pille a descubierto y efectivamente me empape: es cierta. Y puede que no llueva, y entonces es cierta también. Ojo, *si no llueve, es cierta* independientemente de que me moje (porque me moje una vecina que está regando los tiestos, por ejemplo) o no. Claro que también puede ocurrir que al final llueva, pero yo tenga la suerte de que me pille debajo de una marquesina y pueda resguardarme: entonces es falsa. *Sólo entonces es falsa*.

¿Cuándo sabremos, pues, si la frase es cierta o falsa? Pues, como siempre, cuando detectemos un contraejemplo: *llovió y no me mojé*. Entonces y sólo entonces sabremos que la frase es falsa. Pero mientras tanto… ¡Es verdadera, pase lo que pase! No he mentido.

Otro:

"**Si eres hombre, eres mortal**". Frase paradigmática de la filosofía clásica. ¿Es cierta o es falsa? Estaremos de acuerdo en que las pruebas empíricas nos indican que debe ser cierta: hasta ahora no se ha encontrado ningún contraejemplo, no se ha encontrado a ningún hombre inmortal, salvo en novelas de ciencia ficción, como en "Tú, el inmortal", de Roger Zelazny, y me han dicho que los ejemplos literarios no sirven…

Así que, en ausencia de contraejemplo, la daremos por cierta siempre y en toda ocasión. Y como se refiere a todos los hombres, sin excepción, la elevamos a la categoría de *Ley Universal*.

Otro:

"**Si todo el mundo fuese mío, todo lo daría por yacer con la Reina de Inglaterra**". Frase escrita en el Siglo XIII, extraída de Carmina Burana, a la que puso música inmortal Carl Orff, que con variantes diversas hemos oído o dicho muchas veces a lo largo de nuestra vida. Tampoco es una frase tan extraña, frases similares son de uso común en nuestra vida diaria: "Si fuera rico haría esto o lo otro", "Si pudiera, iría a tal sitio", "Si lo hubiera sabido, no habría hecho tal cosa", etcétera.

En definitiva, ¿Cierta o Falsa?

Pues en tanto no nos hagamos asquerosamente ricos, pero ricos-riquísimos, no se cumple el antecedente, y desde luego no es probable que el goliardo que escribió la frase hace 700 años fuera dueño de algo más que su desgastada ropa, así que, entretanto, la frase es verdadera. Sólo se demostrará como falsa si alguna vez todo el mundo es nuestro y nos pensamos mejor eso de *darlo todo* por yacer con la Reina de Inglaterra.

Y otro más:

"**Si soy un hombre, tengo ocho patas**". Frase que quizá os suene rara, pero cosas parecidas decimos también en nuestras doctas conversaciones de cada día: "Si mi abuela tuviera ruedas, sería un camión", o "Si eso es verdad, yo soy el Papa de Roma"… En fin: ¿Verdadera o falsa?

Vaya, ésta es realmente fácil: siendo hombres (del género *homo*, quiero decir, que no se me acuse de machista) como somos, basta con mirarse de cintura para abajo (y saber contar) para darse cuenta de que al menos hay un humano que *no* tiene ocho patas… hemos encontrado al menos un contraejemplo: la frase es falsa, por tanto.

Bien. Unos pocos párrafos antes nos preguntábamos cuál sería la diferencia entre una implicación *particular* (que afecta a una única situación, individuo, etc) y una *universal* (que afecta a todo el "Conjunto Universal" aplicable: la humanidad, los españoles, las ardillas del parque, lo que sea), de cara a la determinación de su certidumbre o falsedad.

Es decir: ¿**Afecta en algo para determinar si una implicación es cierta o falsa el que ésta se refiera a un *particular* o a un *universal***, por ejemplo que se aplique sólo a mi estornudo concreto o al estornudo de todo ser humano, incluso al estornudo de todo bicho viviente?

Pensadlo un momento…

Efectivamente. **En nada en absoluto**. Su tabla de verdad es exactamente la misma, y el método de comprobación, el mis-

mo: en cuanto encontremos un contraejemplo (cuando, cumpliéndose el antecedente *p*, no se cumple el consecuente *q*, o sea cuando $pq' = 1$), podemos determinar que la implicación es falsa. Se trate de una tontería mía del estilo de "*Si voy al cine, como palomitas*", que ya ves tú qué importancia puede tener, o de una Ley Universal del estilo de "*Si estamos en este Universo, no hay nada que pueda ir más rápido que la luz*". **Da igual**.

Si voy al cine dispuesto a comprar palomitas de maíz (así se llaman en España: *palomitas*; en inglés se denominan "*popcorn*", y en HispanoAmérica me consta que se llaman de múltiples maneras… por ejemplo, en Ecuador se llama *canguil*), pero la máquina está estropeada y no puedo comprarlas (ni, por lo tanto, comerlas), o bien ese día no tengo hambre y paso de comer palomitas, en cualquier caso mi "*palomitera*" afirmación es falsa.

Y si alguien detecta en este Universo un neutrino díscolo que va más rápido que la luz, uno solo, pero que de verdad vaya más rápido, entonces la Relatividad Especial es falsa, se ponga Einstein como se ponga… Total, fue Albert Einstein quien se "cargó" la Teoría de la Gravitación Universal de Newton, así que…

Por fin un último ejemplo, que nos servirá, además, de nexo con el siguiente capítulo. Está extraído directamente de los ínclitos Les Luthiers, lo que garantiza su plena vigencia e idoneidad…

Una madre desesperada le dice a su hijito: "*Mirá nene… Si no tomás la sopa, viene el Hombre de la Bolsa*".

Una implicación lógica como una casa de quince pisos, como podéis ver: $Nocomersopa \Longrightarrow VenirHombredelaBolsa$.

Por cierto, en España decimos "*El Hombre del Saco*", y este personaje popular está basado en hechos reales: parece que a fines del Siglo XIX hubo un asesino, un tal Francisco Ortega, *El Moruno*, que secuestraba a sus víctimas, las metía en un saco de arpillera, las desangraba, descuartizaba y qué sé yo qué más, y luego echaba los pedazos en otro saco para esconderlos por el campo… La realidad supera a la ficción.

Volviendo a la mamá y su desganado nene, tras lo que ya sabemos, que es mucho, ¿qué podemos decir de tan amenazante implicación?

Si el nene se achanta y se toma la sopa, entonces podemos concluir que la implicación era cierta; si el Hombre de la Bolsa no viene, pues nada, normal, pero incluso aunque al Hombre de la Bolsa le diera por ir de todos modos, la implicación en sí sería cierta, es decir, si el nene sí se comió la sopa, **mamá dijo la verdad**.

Pero ¿qué pasa si el nene no se toma la sopa de ninguna manera…? Pues puede que efectivamente el Hombre de la Bolsa vaya y haga lo que quiera que hagan los Hombres de la Bolsa: nuevamente, **mamá dijo la verdad**, no mintió, la implicación era cierta. Lo que luego le pase al nene en su estrecho diálogo con el Hombre de la Bolsa es otra historia…

Claro está, también puede pasar que **el dichoso Hombre de la Bolsa no vaya**. ¡Catástrofe! ¡La mamá mintió! La implicación lógica base de la amenaza sopera no era cierta, ergo **quien la dijo mintió: Mamá**.

Eso es lo que se llama **deducir**… A formalizar la **deducción lógica** estará dedicado el siguiente capítulo del libro, así que, por ahora, mejor lo dejamos así. Únicamente comentar que, tras la deducción, que ya veremos cómo se hace, cómo se formaliza, el nene aprende… ¡Vaya si aprende! La próxima vez tampoco tomará la sopa, aunque le amenacen con ponerle la discografía completa de David Bisbal… ¡*Dos veces*! ¡Esto es lo que se llama "*Educación*"!

… Pero es que aún hay un caso peor… Sí, mucho peor.

Como se preguntan Les Luthiers, ¿qué pasaría si **El Hombre de la Bolsa *tampoco quiere tomar la sopa***? ¿Eh? Esto sí que sería como para convertirse en adorador del Gran Spaghetti Volador… Así que cuidadín con amenazar: igual luego no podemos cumplir la amenaza y quedamos como unos embusteros, además de como Cagancho en Almagro.

Para acabar con este kilométrico capítulo, unas breves frases para desmontar de una vez por todas una de las falacias más habituales hablando de implicaciones lógicas: **El que una implicación entre dos frases sea cierta no quiere decir que sea cierta la implicación entre la negación de esas mismas frases.** Me explico:

Supongamos como cierta la implicación que todos los padres decimos a nuestros hijos en alguna ocasión: "**Si comes, crecerás**", con todas sus múltiples variantes: "Si comes te pondrás más fuerte", "Si comes serás más alto que tu primo", etc. Podemos suponer a priori que es mayormente verdadera: para crecer es preciso comer, pues no es sencillo encontrar contraejemplos de casos en que, no comiendo, alguien crezca o que, directamente, no acabe por morirse.

Ahora bien, de la presumible certeza de esta frase no se puede extraer de ninguna manera que "**Si NO comes, NO crecerás**". En absoluto.

Representemos todo esto en nuestras conocidas, las ecuaciones booleanas amigas. Siendo *p*: "**Comer**" y *q*: "**Crecer**", podemos representar:

"*Si comes, crecerás*" como $p \Longrightarrow q$, y

"*Si NO comes, NO crecerás*" como $p' \Longrightarrow q'$.

O, lo que es lo mismo,

"*Si comes, crecerás*": $p' + q$, y

"*Si NO comes, NO crecerás*": $p + q'$.

Para que la segunda frase sea cierta (suponiendo cierta la primera) debe tener su misma Forma Normal Disyuntiva, o lo que es lo mismo, su misma tabla de verdad. ¿De acuerdo en esto?

La FND de la primera frase (es decir, "*Si comes, crecerás*", es: $pq + p'q + p'q'$, y

La FND de la segunda frase (o sea, "*Si NO comes, NO crecerás*") es: $pq + pq' + p'q'$.

No son iguales. El segundo término es diferente en ambos casos: $p'q$ en el primero y pq' en el segundo. ¿Qué quiere esto decir? Traduzcamos al español:

Los términos "*Comes y Creces*" (pq) y "*No comes y No Creces*" ($p'q'$) forman parte de la FND de las dos implicaciones, pero en la primera de ellas está el término "*No Comes y Creces*" ($p'q$, es decir, que puede que crezcas aunque no comas) mientras que en la segunda el término que está es "*Comes y No Creces*" (pq', es decir, que puede que, aunque te atiborres de comida, seas de esos afortunados que no crecen ni un milímetro, ni siquiera a lo ancho…).

Dejamos para el que lo desee construir la tabla de verdad de ambas frases, para que constate visualmente, además de algebraicamente, que de ningún modo es lo mismo una frase que otra.

Algunos pueden pensar, no obstante, que la diferencia entre una cosa y la otra es sutil, casi irrelevante, que no es para tanto, que en definitiva es prácticamente lo mismo… pues **no lo es**. Y, desde luego, en un razonamiento científico no se puede de ningún modo caer en esta falacia.

Ah! ¿Hay algunos de entre vosotros, sufridos lectores, que aún no veis claro por qué este tipo de frases son una falacia? Vale, volvamos un momento a la frase que nos ha introducido en los intríngulis de las implicaciones lógicas, a saber: "*Si estornudo, cierro los ojos*". Os acordáis, ¿no?

Bien. Pues aplicar esta falacia aquí implica que, asumiendo como verdadera la implicación original, aceptamos igualmente como cierta la siguiente perla: "*Si **NO** estornudo, **NO** cierro los ojos*". Es decir, el conjunto de situaciones en que "*No Estornudo*" está contenido en el conjunto de situaciones en que "*No Cierro los Ojos*", o, escrito según los dictados del álgebra de conjuntos, $ESTORNUDO' \leq CIERROLOSOJOS'$. ¿Es eso cierto?

Para empezar, según las propiedades de la relación de orden parcial $\leq$ que vimos en el segundo capítulo del libro, $ESTORNUDO' \leq CIERROLOSOJOS'$ implica necesariamente que $CIERROLOSOJOS \leq ESTORNUDO$. ¿Recordáis?

¿Qué significa esto? Veamos: el dibujo sería algo como el siguiente:



Lo que pasa en "Si ***NO*** *estornudo,* ***NO*** *cierro los ojos". Falacia enorme.*

Supongo que ya os dais cuenta de que algo hay que no funciona... Porque **ésta es también la representación en diagramas de Venn de la implicación** "***Si cierro los ojos, estornudo***"…. y no era esto lo que nosotros queríamos decir, que era: "Si NO estornudo, NO cierro los ojos".

¡Ja! Exactamente: una y otra son la misma frase, tienen la misma fórmula, la misma tabla de verdad. Es lo mismo. En una palabra: **son idénticas.**

Así que, para probar definitivamente si la frase es cierta o no, como hemos dicho unas doce veces ya, basta con encontrar un contraejemplo, es decir, una única situación en que *No Estornudando*, de todos modos *Cierro los Ojos*. No es muy difícil, me parece a mí, encontrar una situación tal: basta con echarse una siestecita...

Luego, suponiendo como verdadero que "Si estornudo, Cierro los ojos", entonces "*Si* ***NO*** *estornudo,* ***NO*** *cierro los ojos*" (o "Si cierro los ojos, estornudo", que ya hemos visto que es exactamente la misma frase) es una falsedad como un piano de cola.

¿Se ve claro ahora?

En un ejemplo tan tonto, tan evidente como éste, parece obvio que una y otra frase no son la misma cosa, pero pensad en cosas más serias, como cuando un candidato a alcalde asegura vehementemente que "*si me elegís, habrá una carretera entre Villarriba y Villabajo*".

Lo que sibilinamente él quiere que entendáis es que "*si **no** me elegís, **no** habrá tal carretera*"… pero eso no es la misma cosa. En absoluto. Puede, por ejemplo, que los otros candidatos también tengan pensado hacer la carretera. De nuevo, estos ejemplos son fáciles, pero a menudo esta falacia se esconde detrás de dobles negaciones y enrevesadas frases con muchas más condiciones, y no es tan sencillo darse cuenta de ella. Los periódicos están cada día llenitos de frases como éstas…

Avisados quedáis.

Aquí acaba este capítulo dedicado a la implicación lógica. Ha sido un capítulo bastante intenso, me parece. En realidad, podríamos seguir y seguir… las discusiones sobre implicaciones lógicas son, además de interesantísimas, eternas, pero en algún momento hay que cortar…

En el próximo capítulo continuaré profundizando en el fascinante cálculo proposicional, en concreto sobre el proceso deductivo, siempre de la mano de Don José Cuena, a ver dónde acabamos.

Además de en el psiquiátrico, quiero decir.

VII- El proceso de deducción lógica

En el capítulo anterior de este libro sobre Lógica, para escribir el cual estoy usando extensivamente los amarillentos apuntes de la asignatura de "Metodología" de Segundo de Carrera, año académico 1973-74, impartida por Don José Cuena Bartolomé, vimos qué son las implicaciones lógicas, y sobre todo cuál es su formula y cómo se traducen en cálculo proposicional.

Llegamos a que $(p \Longrightarrow q) = \neg p \vee q$, o sea, la implicación es cierta si el antecedente es falso o verdadero el consecuente (o ambas cosas, claro), e intenté justificar por qué es así y no de otra manera. Espero haberlo conseguido. Y eso, en álgebra de Boole, se representa: $(p \Longrightarrow q) = p' + q$.

Estamos más o menos en marzo de 1974. Semana Santa acecha, con sus consabidas vacaciones y sus exámenes parciales, se acercan los exámenes finales, y hay que apretar. Veamos cómo empieza hoy la clase Pepe Cuena…

Pero antes de comenzar a deducir nada debo insistir una vez más en **cuál es la función de la Lógica formal** que estoy contando con la inestimable ayuda de Pepe Cuena a través del Túnel del Tiempo.

Hemos visto que, teniendo de unas ciertas proposiciones individuales, éstas se pueden combinar de mil y una formas, mediante disyuntivas, conjuntivas o negaciones, con implicaciones, etc. En todos los casos hemos visto cómo calcular el valor de verdad de la proposición compuesta resultante en base a los valores de verdad de las proposiciones atómicas que las componen, bien de forma algebraica, bien mediante las tan útiles tablas de verdad. Hemos puesto diversos ejemplos, rebatido falacias… y hay que reconocer que el resultado de alguna de estas frases era, cuando menos, chocante, sobre todo cuando lidiábamos con las consecuencias de la escurridiza implicación lógica del capítulo anterior.

Por ejemplo, una frase como "*Si la arcilla es un metal entonces es maleable*" es radicalmente verdadera, por mucho que todos sepamos que la arcilla no es de ninguna manera un metal. Y es

así porque sólo resultaría falsa en el caso de que siendo verdadero el antecedente ("La arcilla es un metal") entonces fuera falso el consecuente ("la arcilla es maleable"). Como resulta que la arcilla sí que es maleable, ese caso no se da, y por tanto la implicación es verdadera. Y eso nos choca, nos suena a cuento chino y nos hace desconfiar de los resultados de la aplicación de las fórmulas… ¡Si ya decía yo antes que la implicación era *escurridiza*!

Entonces ¿qué es lo que ocurre? Pues dos cositas, dos nimios detalles que muchas veces damos por sentado y otras… olvidamos, a saber:

Primero: La Lógica trata con proposiciones, y dije en el capítulo correspondiente, he repetido varias veces desde entonces y repito una vez más ahora que "**Una proposición es una frase a la que podemos atribuir sin ningún género de duda un valor de certeza o falsedad**". Atención: "***sin ningún género de duda***".

Esto elimina todas las frases que no sean objetivamente catalogables en cierto momento como verdad o mentira, es decir, muchísimas afirmaciones de filósofos y pensadores de todos los tiempos que tienen que ver con la divinidad, la naturaleza humana, la moral, etc, etc. Por ejemplo, la frase "*Los arios son una raza superior*" seguramente sería clasificada como verdad inmutable por los jerarcas y pensadores nazis, pero sería terminantemente catalogada como falsa de toda falsedad por casi todos los demás. ¿Es verdadera o es falsa? ¿Qué conclusiones podemos obtener de cualquier proposición compleja en la que aparezca esta frasecita? Pues eso.

Y **segundo**, y casi más importante: **La Lógica formal no entiende nada acerca de si una proposición individual es verdadera o falsa.** No tiene ni la menor idea de si *p* o *q* son verdaderas o falsas, ni le importa ni le interesa lo más mínimo. Lo que sí formaliza es **qué les ocurre a las diferentes proposiciones complejas** que se forman conjugando o negando o implicando proposiciones individuales, **en función de los diferentes valores de verdad de las proposiciones individuales que las forman.**

Asegura la Lógica que si tenemos la proposición (*p·q*), esa proposición compleja sólo será cierta si tanto *p* como *q* son ciertas, y en cualquier otro caso, *p·q* es falsa. ¿Qué es lo que dice esta aseveración acerca del valor de verdad o falsedad de *p* y de *q*? Efectivamente: Nada. **Nada de nada**.

Entonces, ¿quién es el responsable de fijar en cada caso si p o q son verdaderas o falsas? **Nosotros,** desde luego. No "La Lógica", sino nuestra percepción o nuestro conocimiento o nuestras costumbres o lo que sea. Para fijar qué proposiciones son ciertas y cuáles falsas están otras disciplinas filosóficas (Ética, Moral, Ontología, etc), o científicas (Termodinámica, Trigonometría, Floricultura, Cromodinámica cuántica, etc). No la Lógica.

En este aspecto la Lógica es como la Matemática: ésta última permite transformar ecuaciones en base a una serie de reglas (por ejemplo, los axiomas de Peano) sin entrar a descifrar su significado. Son otras ramas de la ciencia quienes "descifran" las ecuaciones y las aplican a casos concretos del mundo real.

Por ejemplo, la fórmula *V=I·R* (la famosa Ley de Ohm) sale como consecuencia de la aplicación estricta de las reglas matemáticas sobre una serie de otras ecuaciones iniciales. Quien decide si las ecuaciones de partida son verdaderas o falsas no es la Matemática, claro, sino los físicos de la Electricidad. La Matemática garantiza nada más (¡y nada menos!) que todas las transformaciones matemáticas realizadas hasta llegar a *V=I·R* son correctas, así que si las ecuaciones iniciales son verdaderas, entonces la conclusión lo es también.

Pues lo mismo ocurre con la Lógica. Dadas una serie de proposiciones iniciales combinadas de cierta manera, por complicada que ésta sea, la Lógica (que no deja de ser una rama de la Matemática) nos dice cómo podemos transformarlas y nos asegura qué les ocurre a las proposiciones que con ellas se forman, según sea el valor de verdad o falsedad de esas proposiciones iniciales… **valor de certeza o falsedad que tienen que proporcionar otras personas u otras ciencias**. No la Lógica.

Espero haber aclarado un poco más este concepto, que será muy importante para ver lo que viene a continuación: cómo se razona formalmente usando las reglas de la Lógica, es decir, cómo se pueden deducir unas cosas a partir de otras mediante la aplicación razonada de todos los artefactos que hemos visto hasta ahora. Vamos a usar los ladrillitos que hemos ido fabricando en los capítulos anteriores para construir primero paredes, luego edificios, luego ciudades… En una palabra, vamos ya a destripar el proceso de **Deducción Lógica**.

En primer lugar hay que definir formalmente qué es una *Tautología*, puesto que nos hará falta manejar bien este concepto en todo lo que sigue.

Una **Tautología** es una proposición lógica que es siempre verdad, pero siempre, siempre, como las promesas de un político, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen. Por ejemplo, la estúpida frase "*Hace calor **O** No hace calor*", es una tautología: tanto da si hace calor como si no, por fas o por nefas, la frase resultante es obviamente cierta. Muchos políticos, analistas, consultores, economistas y demás basan sus discursos en tautologías más o menos elaboradas para que no resulten tan evidentes a primera vista, de tal modo que sea poco menos que imposible que se equivoquen en sus predicciones. Y aún así, no consiguen acertar…

El caso contrario, cuando una proposición lógica es intrínsecamente falsa, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones atómicas individuales que la forman, se llama *Contradicción*. "Llueve y no llueve" es una contradicción: pase lo que pase en la calle, es falsa. Frase idiota, y encima falsa (aunque, para ser precisos, ciertamente hay casos en que… ¡a saber si está lloviendo o no!).

Definidos estos dos conceptos, para seguir con la exposición hay que definir matemáticamente cómo es la **deducción**. Según la Real Academia de la Lengua, deducir es "*Inferir, sacar consecuencias de un principio, proposición o supuesto*". No es ésta una definición matemática, como podréis comprobar, así que habrá que ponerse a ello…

Desde ese punto de vista formal, la deducción, que es una de las herramientas matemáticas y lógicas más potentes, consiste en **deducir (inferir, construir, crear) nuevas frases a partir de otras preexistentes**, llamadas *premisas*, de tal modo que, **si las premisas son todas ellas ciertas, también lo sea la frase deducida**, la ***conclusión***.

Esto es intuitivo, de acuerdo, pero hay que asegurarse bien de que cuando deducimos algo, estamos haciéndolo bien, es decir, **tenemos que asegurar formalmente que el proceso de deducción en sí mismo es correcto.**

En una palabra, si las premisas en que nos basamos, los *antecedentes*, son verdaderos, entonces, de forma irremediable, obligatoria, necesaria, *el consecuente*, lo deducido, debe ser verdadero también. Si no fuera así es que el propio proceso deductivo es erróneo.

En realidad, estamos tan acostumbrados a deducir cosas a partir de otras, a inferir resultados, comportamientos y acciones a partir de otros, que damos el proceso por sentado. **Y no es así**.

Bueno, no es que no sea así, entendedme, pero **hay que formalizarlo** para que podamos decir sin temor a equivocarnos que cuando deducimos unas cosas a partir de otras lo hacemos bien, es decir: que **podemos fiarnos del resultado de la deducción, para poder seguir deduciendo otras frases a partir de ahí.**

Es la base, **esto es la base** de prácticamente *todo* en la ciencia y la matemática. Si esto no funciona… se nos cae todo el edificio matemático, así que mejor formalizarlo, y hacerlo bien.

Veamos:

Si tenemos tres premisas A, B y C, y queremos deducir una conclusión D, debe ocurrir que **cuando todas las premisas son verdad** ($A \wedge B \wedge C = 1$), **entonces la conclusión (D) debe ser también verdad**, es decir, igual a 1, lo que expresado lógicamente requiere de una buena implicación, que para eso las conocemos ya y no nos asustan.

La fórmula es, evidentemente: $(A \wedge B \wedge C) \implies D) = 1$

Fórmula que en español leeríamos, más o menos: "*Si ocurren simultáneamente A, B y C, entonces ocurre D, y esto pasa siempre, pero siempre, siempre*".

¿Cómo se interpreta esta formulita de arriba?, fórmula importantísima, en realidad, pues ella es la base de todo el asunto deductivo.

Pues que siempre que se cumple que las tres premisas son ciertas (que *todas* las premisas son ciertas, en realidad) la conclusión debe serlo también, por lo que la propia implicación lógica debe ser también siempre verdad… o sea, una tautología. Recordad que acabamos de definir *tautología* como *una expresión que siempre es verdadera*, sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones individuales que la componen.

Luego **la tabla de verdad de la expresión anterior,** $[A \wedge B \wedge C \implies D = 1]$ **debe ser una tautología,** es decir, todos los valores resultado para todas las combinaciones posibles de valores deben ser 1. Si no fuera una tautología, si con alguna cierta combinación de valores de A, B y C, por un lado, y de D, por el otro, la implicación diera un resultado falso, no podríamos deducir nada, no sería una deducción válida, o mejor dicho, se trataría de una deducción no válida, incorrecta.

Ni que decir tiene que lo mismo nos daría que hubiera tres premisas, como en el ejemplo que estoy siguiendo, que dos, diez o cincuenta, es lo mismo.

Entonces, si recordáis la tabla de verdad de la implicación lógica, $(p \implies q) = \neg p \vee q$ (en nuestro ejemplo *p* sería la conjunción de las tres premisas originales: $A \wedge B \wedge C$), hay un caso en que el resultado de la implicación es falso.

¿Recordáis? Sí, seguro que recordáis:

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	**F**
F	V	V
F	F	V

Esto choca con lo que acabo de decir, que para que la deducción sea posible es preciso que $(p \Longrightarrow q) = 1$, y esto para cualquier valor, luego debe ser obligatoriamente una tautología… O sea, que hay que quitarse de en medio esa fatídica "**F**"… y conste que no vale con plantarle una "V" a la brava…

¿Cómo resolverlo? No queda más remedio que obligar a que, cuando *p* sea verdad, *q* sea *obligatoriamente* verdad. Y hay que darle una forma *formal*, valga la redundancia.

Desde hace muchos cientos de años los filósofos y pensadores se han ocupado de este problema, que no es ni más ni menos que la forma común de razonar de la gente, pero central a la matemática en sí. En el lenguaje corriente se ha llegado a una fórmula que representa fielmente esta forma de razonar, de deducir cosas a partir de otras; esta fórmula tiene desde tiempos antiguos un llamativo nombre en latín que a muchos os sonará: *modus ponens* (o, para los más precisos, "*modus ponendo ponens*", toma ya).

El **modus ponens** se representa de la forma siguiente:

p

$\underline{p \Longrightarrow q}$

q

Que las fórmulas no nos acobarden: es muy sencillo, en realidad, e intuitivo. Veámoslo con un ejemplo que ya hemos analizado hasta la saciedad en el capítulo anterior, con estornudos y ojos que se cierran:

Estoy estornudando.

Si estornudo, cierro los ojos.

Luego: *Cierro los ojos.*

El sentido común nos dice que esto es efectivamente así, que el razonamiento es plenamente correcto: si es cierto que "*estoy estornudando*", y es también cierto que "*si estornudo, entonces cierro los ojos*", **si ambas son ciertas, repito, y sólo en ese caso**, entonces indefectiblemente debo estar con los ojos cerrados. Ciego total. Sin ver ni un pimiento. Por cierto, ¿habéis detectado la doble implicación en la frase anterior? Je, je, desde luego, la Lógica formal es como un bulldozer…

Y en el ejemplo del prometedor (porque promete cosas) político del último capítulo, ése que decía que "*Si gano la elección construiré un hospital*", imaginemos que le hemos creído y al final ganó la elección. Por tanto, podríamos asegurar que:

El político ganó la elección.

Si gana la elección, entonces construirá un hospital.

Ergo: *Construirá un hospital.* Es indefectible, inevitable como el devenir de las estaciones: en unos meses o años habrá un nuevo hospital en la zona…

Ah *¿Que no lo construyeron*…? Vaya. ¡Qué cosas!

Pues conste que el razonamiento está muy bien hecho, es un razonamiento correcto, ni René Descartes lo hubiera hecho mejor… así que habrá que examinar la certeza o falsedad de las premisas. Como parece que es innegable que nuestro político ganó la elección, que yo le he visto celebrarlo efusivamente en la tele, parece que la única posibilidad factible para que no tengamos hospital nuevo es que la frase "*Si gano la elección, construiré un hospital*" sea falsa. Falsa como un billete de 38 euros y medio…

Y si la frase de marras, la promesita electoral de nuestro amigo, es falsa, es porque **quien la dijo, mintió**. Nos la ha dado con queso. Nos ha engañado, nos ha hecho un trile, un truco. Así que, en justa correspondencia, en las próximas elecciones no le votamos más, por mentiroso.

Ah, ¿que esto tampoco funciona *exactamente* así…? Bueno, ya decía yo que, de *Lógica humana*, sabía yo más bien poco…

Sigamos con el razonamiento. El *modus ponens* se especificaba como:

p

$\underline{p \Longrightarrow q}$

q

Bien. Si escribimos todo esto según los dictados del cálculo proposicional, llegaremos a que $[p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q] = 1$.

Efectivamente, la conjunción (**Y**) de las dos premisas implicando la conclusión es una tautología. El que una de las dos premisas sea otra implicación es, en realidad, irrelevante, pues no deja de ser una proposición, ni más ni menos que una proposición monda y lironda como otra cualquiera, que puede ser evaluada como cierta o falsa sin dificultad.

Supongo, además, que os habéis dado cuenta de que para obtener un *modus ponens* con toda la barba, y a la luz del Cálculo Proposicional y su propiedad conmutativa, **el orden en que se presentan las dos premisas es irrelevante**.

Es decir, también sería un *modus ponens* válido si expresamos las proposiciones de la siguiente forma (imaginad que la rayita de debajo de la *p* fuera más larga… no he sabido cómo conseguir alargar la rayita en la fórmula: os ruego perdonéis mi torpeza con la cosa de la tecnología moderna):

$p \Longrightarrow q$

$\underline{p}$

q

Sólo queda comprobar una pequeña cosita… ¿en verdad esta construcción es una tautología?

No os fiéis de mi palabra: comprobémoslo, como siempre, construyendo su tabla de verdad.

p	q	$p \Longrightarrow q$	$p \wedge (p \Longrightarrow q)$	$p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Efectivamente, resulta una tautología, su resultado siempre es verdadero. ¿No lo ves? Espera, vamos a hacerlo mediante nuestra amiga, la eficacísima álgebra de Boole, verás qué rápido lo entiendes.

$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q =$

$[p(p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q =$

$[p(p' + q)] \Longrightarrow q =$

$[pp' + pq)] \Longrightarrow q =$

$[0 + pq)] \Longrightarrow q =$

$pq \Longrightarrow q =$

$(pq)' + q =$

$(p' + q') + q =$

$p' + q' + q =$

$p' + 1 = 1$

Listo.

Sí, ya sé que en realidad es más fácil comprobar la tabla de verdad, pero así veis que el método algebraico también funciona perfectamente.

Por lo tanto, **el hecho de *deducir* es ver si puede existir *formalmente* una relación tal que, cuando la conjunción de todas las premisas sea verdad** (o sea, todas ellas son simultáneamente verdad) **entonces la conclusión ha de ser necesariamente verdad**.

Si alguna de las premisas es falsa entonces la conclusión puede ser verdadera, falsa o mediopensionista, no podremos asegurar nada en absoluto sobre ella, como ocurre en el ejemplo de la *hospitalaria* promesa del político.

Por cierto, y esto es importante, **el razonamiento puede ser correcto o incorrecto, nunca *verdadero o falso***. Las premisas lo son, verdaderas o falsas; el razonamiento en sí no lo es. **Si el razonamiento que hemos hecho es correcto, entonces, cuando todas las premisas sean verdad, y sólo en ese caso, podemos asegurar que la conclusión es verdadera también**. Eso es lo que se llama una buena deducción…

Atención: **Podría parecer que el proceso deductivo sólo puede hacerse con Leyes Universales**, con enunciados que abarquen a todo un conjunto universal, incluso a todo un Universo… **Pues no, señores, esto no es así**. El proceso descrito hasta ahora es correcto sean como sean los enunciados sobre los que se aplica… siempre que las premisas sean ciertas, insisto por enésima vez. Tanto da que apliquemos el proceso deductivo a la Ley de la Relatividad General, como al hecho de si como o no como palomitas en el cine. Tanto da.

En el primer caso tenemos como Premisas: 1: Si la luz pasa cerca de una masa, se curva; 2: La luz pasa cerca de una masa; y como Conclusión: **La luz se curva**. Y en el segundo, las Premisas son: 1: Si voy al cine, como palomitas; 2: Ayer fui al cine; y la Conclusión: **Ayer comí palomitas**.

En ambos casos el proceso de falsamiento es el mismo: **buscar contraejemplos**. Por ejemplo: Cierta luz pasa cerca de una masa, pero no se curva: La Ley de la Relatividad General es falsa. O bien: Ayer no comí palomitas, así que: o no fui al cine, o no es cierto que “si voy al cine como palomitas”, o ambas cosas a la vez, como siempre.

Desde luego, las repercusiones que tendría falsar la Relatividad General no son en absoluto comparables a las de falsar mi impenitente avidez por comer palomitas en el cine… pero el proceso en sí es idéntico.

Idéntico.

Pongamos un ejemplito de proceso deductivo. Chiquitín. Bueno… más o menos chiquitín: Ver si lo siguiente es un razonamiento correcto… o no.

El ejemplo es el siguiente:

$a \wedge b \Longrightarrow c \wedge d$

$\underline{\neg b \vee \neg d}$

$\neg a \vee \neg b$

¿Entendéis algo? ¿No? *Vaaaale*, pongámosle nombre a las proposiciones, a ver si ayuda:

a: *Soy español*.

b: *Tengo bigote*.

c: *Me gusta el futbol*.

d: *Me gustan los toros*.

Dadas estas frases iniciales, el razonamiento a comprobar es el siguiente:

Las dos **premisas** son:

"*Si soy español y tengo bigote, entonces me gustan el fútbol y los toros*".

"*O no tengo bigote o no me gustan los toros (o ambas cosas, como siempre)*".

Y la **conclusión** sería: "*O no soy español o no tengo bigote*".

¿Se ve mejor así…? Se trata de comprobar si éste es un razonamiento correcto, si se puede deducir la conclusión de esas dos premisas.

Vamos con ello. Hay dos premisas, $a \wedge b \Longrightarrow c \wedge d$, por un lado, y por el otro $\neg b \vee \neg d$.

Si ambas son ciertas, y sólo en ese caso, entonces la conclusión, $\neg a \vee \neg b$, debe serlo también. Es decir, $[(a \wedge b \Longrightarrow c \wedge d) \wedge (\neg b \vee \neg d) \Longrightarrow \neg a \vee \neg b] = 1$

Para comprobarlo, construyamos la fórmula de la deducción en álgebra de Boole y, simplificando, veamos si es efectivamente su valor es 1 en toda ocasión. Esa fórmula es:

$[(ab \Longrightarrow cd)(b' + d')] \Longrightarrow (a' + b')$, que es lo mismo que:

$[((ab)' + cd)(b' + d')]' + (a' + b') =$ Aplicando las Leyes de De Morgan:

$[(a' + b' + cd)(b' + d')]' + a' + b' =$

$(a' + b' + cd)' + (b' + d')' + (a' + b') =$

$ab(cd)' + bd + (a' + b') =$

$ab(c' + d') + bd + a' + b' =$ Reordenando:

$a' + b' + ab(c' + d') + bd =$ Aplicando la distributiva del + sobre el · (ésa que tan rara se nos hace):

$(a' + b' + ab)(a' + b' + c' + d') + bd =$ Y aplicando nuevamente la distributiva del + sobre el ·

$(a' + b' + a)(a' + b' + b)(a' + b' + c' + d') + bd =$

$(1 + b')(a' + 1)(a' + b' + c' + d') + bd =$

$(a' + b' + c' + d') + bd =$

$a' + b' + c' + d' + bd =$ Reordenando de nuevo:

$(a' + c') + (b' + d' + bd) =$ Y otra vez la distributiva del + sobre el ·

$(a' + c') + (b' + d' + b)(b' + d' + d) =$

$(a' + c') + (1 + d')(b' + 1) =$

$(a' + c') + 1 = 1$

Bufff. Efectivamente, la tabla de verdad del razonamiento es una tautología. O sea, que, sólo en el caso de que las dos premisas sean verdaderas, *o no soy español o no tengo bigote* (o ambas cosas, recordemos que el O no es exclusivo). El razonamiento está bien hecho, pues. Es correcto. Pero, no nos olvidemos, insisto, sólo podemos asegurar que la conclusión $\neg a \vee \neg b$ es cierta cuando ambas premisas, $a \wedge b \Longrightarrow c \wedge d$ y $\neg b \vee \neg d$ sean ciertas. Si alguna no lo es… vaya Vd. a saber lo que le pasará a la conclusión, igual podría ser cierta que falsa, nada podemos decir de ella.

A continuación dejo una serie de razonamientos correctos. Muchos de ellos completamente obvios, además. Dejo al lector la tarea de demostrarlo (advierto: son muchísimo más sencillos que el ejemplo anterior, y todos ellos muy interesantes). Para hacerlo, recordad, bastará demostrar si la conjunción de las premisas (o la única premisa, si es que sólo hay una) implicando la conclusión es o no una tautología:

p	p+q				
q	p'	pq	p'	p	q
___	___	___	___	___	___
pq	q	p	p==>q	p+q	p==>q

Aconsejo echarle una miradita a estos razonamientos correctos. Alguno de ellos seguramente os parecerá sorprendente, por ejemplo el último… pero a poco que lo penséis (¡o lo calculéis!) os daréis cuenta que todos son correctos y, además, obvios.

Naturalmente, en la vida real no siempre se conoce de antemano la conclusión. Es posible que un científico suponga que ocurre algo (la conclusión buscada) y realice el razonamiento deductivo correspondiente para asegurarse de que la conclusión puede derivarse de las premisas conocidas. Bueno, un científico… o un agricultor, o un fresador, o un vendedor, o un sexador de pollos, o una ama de casa… recordemos que esto funciona no sólo con "Leyes Universales" y fórmulas matemáticas, sino con proposiciones normalitas de la vida corriente.

Pero es más común, creo yo, tener una serie de premisas que son (o se suponen) ciertas y, a partir de ellas, elaborar el razonamiento deductivo hasta llegar a una conclusión. Si el razonamiento está bien hecho, si no es falaz, la conclusión debe ser

cierta también (*si y sólo si las premisas son ciertas*, lo repito una vez más).

Veamos ahora el razonamiento que hizo el nene *luthierano* sopa que vimos en el último ejemplo del capítulo anterior, aquel pobre niño al que su mamá amenazaba con el Hombre de la Bolsa si no tomaba la sopa.

Le decía su mamá: "*Si no tomás la sopa, viene el Hombre de la Bolsa*". Y el nene, a pesar de la amenaza, no se tomó la sopa, que no le gustaba ni un poquito. Entonces, el nene se planteó el siguiente *modus ponens* (él no lo sabía, claro, pero estaba *modusponensizando* de lo lindo):

$$Notomarsopa$$

$$\underline{Notomarsopa \Longrightarrow VenirHombredelaBolsa}$$

$$VenirHombredelaBolsa$$



Evidentemente, el nene no tomó la sopa.

El nene esperó, aterrado, a que el Hombre de la Bolsa viniera a hacer lo que sea que se supone que haga ese siniestro individuo. Siguió esperando… Pero, pasado un rato prudencial, **El Hombre de la Bolsa no vino**. La conclusión del razonamiento era, definitivamente, falsa.

¿Qué conclusión, valga la redundancia, sacó el nene de todo esto? Pues que hay algo mal en el planteamiento anterior. O el razonamiento está mal hecho, o alguna de las premisas era falsa (o las dos a la vez).

El nene rápidamente se da cuenta de que el razonamiento es impecable: ¡Si es un *modus ponens* que ni el mismísimo Aristóteles lo hubiera mejorado! Luego entonces deben ser las premisas; **alguna de ellas es falsa**, no hay duda. Tan sólo mirando el plato lleno de sopa, y el vacío en su estómago, ya se da cuenta de que la proposición "*El nene no tomó la sopa*" es cierta, está clarísimo. Luego, por eliminación, debe ser la otra premisa la que está mal, la que es falsa…

Vaya. Entonces, no es cierto que "*Si no me tomo la sopa, Viene el Hombre de la Bolsa*". Amenazante frase pronunciada por su mamá, que ha quedado retratada como una… mentirosa. Amante, sí, pero mentirosa. El nene aprendió que *no todas las cosas que dicen los adultos, ni siquiera su mamá, son ciertas*… ¡Ya se está preparando para la vida adulta!

De todos modos, como los mismos Les Luthiers concluyen al respecto, "*Señora… ¿A quién se le ocurre amenazar con un folklórico personaje imaginario…? Puestos en el caso es mucho mejor amenazar con horrores más tangibles:* ***El lobo, la araña, una buena víbora****…*". Grandes, Les Luthiers. MUY grandes.

Volviendo a lo que nos ocupa, es sencillo ver que si el razonamiento es cierto para dos premisas y una conclusión será también válido para *tres* premisas (pues basta con considerar que una de las premisas es la conjunción de las otras dos).

No hay que ser muy listo, entonces, para darse cuenta de que sirve igual para un número cualquiera de premisas $P_1, P_2, , P_n$. En este caso, podemos tranquilamente decir que $[P_1 \cdot P_2 \cdot \cdot P_n \Longrightarrow q] = 1$ No me voy a detener en la demostración, porque es muy sencilla e intuitiva y, queridos lectores, tenéis herramientas más que suficientes para poder demostrarlo fácilmente. Y pasar un buen rato. Supongo.

Igual alguno de vosotros está pensando "Yo estudié alguna vez no sólo el *modus ponens*, sino también el *modus tollens* y no sé cuántos *modus* más… y no los veo por parte alguna". Tenéis razón. **Ni los veis ni los vais a ver**: no hacen ninguna falta. Sabiendo cálculo proposicional y cómo es el *modus ponens*, todos los demás *modus* aparecen naturalmente de él.

Veamos, por ejemplo, el "*modus tollendo tollens*", más conocido por *modus tollens* a secas, y que tan importante resulta para el Falsacionismo. Dice el *modus tollens*:

$$A \Longrightarrow B$$

$$\underline{\neg B}$$

$$\neg A$$

O sea, si se cumple que A implica a B, y se cumple la negación de B, entonces la conclusión es la negación de A. ¿En qué se diferencia esto de un *modus ponens*? En poco: que las proposiciones A y B están negadas y sin negar en diferentes sitios… ¿y, a estas alturas, *eso* nos asusta?

Fijaos bien, para saber si esta forma de razonar llamada *modus tolllens* es correcta, hay que hacer exactamente lo mismo que hicimos con el *modus ponens*: descubrir si la conjunción de las premisas implicando la conclusión es una tautología.

O sea, $[(A \Longrightarrow B) \wedge \neg B] \Longrightarrow \neg A$ debe ser una tautología, igual a 1, en otras palabras. ¿Lo es?

La fórmula equivalente a comprobar, eliminando sucesivamente las implicaciones y reduciendo, es:

$$[(A' + B)B'] \Longrightarrow A' =$$

$$(A'B') \Longrightarrow A' =$$

$$[(A'B')]' + A' =$$

$$(A + B) + A' = 1$$

El resultado es siempre 1, es verdadero: Tautología al canto.

Luego el *modus tollens* es un razonamiento correcto. Y lo mismo con el resto de *modus*.

Conociendo bien el *modus ponens*, pues, y las reglas del Cálculo Proposicional, que en realidad son las del álgebra de Boole, todos los demás… salen solos.

Sigamos un poco más. Cuando tenemos una cadena de premisas con implicaciones encadenadas, se puede alcanzar la conclusión usando extensivamente el *modus ponens*, en una suerte de propiedad transitiva encadenada, usando la conclusión del *modus ponens* anterior como premisa del siguiente, y así.

Por ejemplo:

p

$p \Longrightarrow q$

$q \Longrightarrow r$

$r \Longrightarrow s$

$\underline{s \Longrightarrow t}$

t

Es fácil de ver: al ir aplicando *modus ponens* sucesivos, vemos que:

p

$\underline{p \Longrightarrow q}$

q

$\underline{q \Longrightarrow r}$

r

$\underline{r \Longrightarrow s}$

s

$\underline{s \Longrightarrow t}$

t

Imaginad que la cadena de frases de ahí arriba es del estilo: "Soy español"; "si soy español me gusta el fútbol"; "si me gusta el fútbol veo la tele"; "si veo la tele me voy tarde a la cama", etc, etc. Es evidente que, si todas las frases son ciertas, y *sólo en ese caso*, si soy español entonces… pues me voy tarde a la cama. Cosa que suele ocurrir, por cierto.

Un último ejemplo por hoy: Un vecino mío es de costumbres fijas. *Muy* fijas:

Si toma café, no toma leche.

Toma galletas sólo si bebe leche.

No toma sopa a menos que haya tomado galletas.

Hoy al mediodía se tomó una taza de café.

La pregunta es: ¿**Ha tomado hoy sopa**?

Designemos, en primer lugar, las proposiciones elementales:

c: Toma café.

l: Toma leche.

g: Toma galletas.

s: Toma sopa.

Bien. Ahora escribamos las diferentes implicaciones del enunciado, que son la base deductiva:

$c \Longrightarrow l'$

$l' \Longrightarrow g'$

$g' \Longrightarrow s'$

c

Creo que no habrá problema alguno en entenderlo. Ahora ordenamos y reducimos:

c

$\underline{c \Longrightarrow l'}$

l'

$\underline{l' \Longrightarrow g'}$

g'

$\underline{g' \Longrightarrow s'}$

s'

La conclusión, pues, es **s'**. La negación de *s*.

Luego no, no tomó sopa hoy. Se ve que no le hemos amenazado con ningún Hombre de la Bolsa si no se la tomaba...

Basta por ahora, deduzco que ya ha habido bastantes deducciones por esta vez… El próximo capítulo, más píldoras lógicas de la mano de Don José Cuena, hablándonos, vía el Túnel del Tiempo, desde mis apolillados apuntes del curso 1973-74.

VIII- El cálculo de predicados

En el capítulo anterior de este quizá anticuado (pero intenso) libro sobre Lógica de aplicación para la informática, para confeccionar el cual estoy usando los apuntes de la asignatura de "*Metodología*" de mi lejanísimo Segundo de Carrera, de Informática, del año académico 1973-74, impartida por el desgraciadamente fallecido profesor D. José Cuena Bartolomé, llegamos a definir el proceso de deducción lógica dentro del cálculo proposicional. Habíamos visto cómo usar la implicación lógica, el *modus ponens* y alguna cosilla más.

Como veréis, en el libro no aparecen hasta aquí ni los silogismos ni, prácticamente, el "*modus tollens*", ni mucho menos el "modus ponendo tollens", el "modus tollendo ponens" ni ningún otro tipo de inferencia clásica, todas esas cosas tan de buen ver en la Lógica filosófica tradicional, por no decir *medieval*, o escolástica, o aristotélica, o sanagustiniana, vaya Vd. a saber. Sabiendo álgebra de Boole y cálculo proposicional, no hacen ninguna falta.

La cosa es que en aquella asignatura de tan misterioso nombre, "*Metodología*", de un par de horas semanales nada más, nos quedamos siempre "en el chasis", en los fundamentos que nos permiten definir, con sólo pensar un poco, todos los demás modos de "*modus*", etc.

Todo está, en realidad, gobernado por el álgebra de Boole. Ah, si los afanosos silogistas medievales hubieran conocido el álgebra de Boole, las cosas hubieran sido mucho más sencillas… pero aún faltaban algunos siglos para que George Boole, que nació en 1815, definiera su famosa álgebra, y para que Huntington formalizara sus axiomas, en 1904. Ya al final del libro hablaré someramente de los silogismos, para aquellos lectores que no los conozcan y sientan alguna curiosidad sobre cómo razonaban los pensadores medievales.

Además, el método de exposición que siguió Pepe Cuena, como ya dije hace un par de capítulos, era desde lo particular a lo general, definiendo bien los ladrillitos y luego construyendo con ellos cada vez edificios más y más altos y complejos... Es lo que

los consultores llamarían un método “bottom-up”, o de abajo arriba, en contraposición al método “top-down”, de arriba abajo, o desde lo general a lo particular. Pues ya nos estamos aproximando a “lo general”…

Estamos ya a mediados, casi finales de abril, el curso se está acabando. Las clases finalizaban por entonces a mediados de mayo, para realizar los últimos parciales y dedicar casi todo junio a los finales, y luego septiembre a los exámenes de recuperación. Ahora, con todo eso de “*Bolonia*”, el calendario universitario tradicional ha cambiado tanto que ya no sé cómo funciona. El caso es que aquel curso de 1974 se está acabando… y el libro con él. El último tema del curso, y el que cierra el círculo, tendrá que ver con el **Cálculo de predicados**. Cedamos un día más la palabra a Don José…

Cálculo de predicados, sí, pero… ¿qué es un *predicado*?

Pues un predicado es alguna cosa que se dice de algo, una cierta información que se da o se sabe acerca de un término (en gramática o lingüística, diríamos *del sujeto*).

Supongamos la frase “**Juan es fontanero**”. Aquí el término es “*Juan*”, mientras que el predicado es “*es fontanero*”, que nos informa de que Juan tiene ciertas habilidades que le permiten, entre otras muchas cosas, arreglar un grifo que gotea. En este caso se trata de un predicado “*monádico*”, puesto que se refiere a un solo término (Juan) y se representa por ***P(x)***, siendo la variable *x* cada término a los que se refiere el predicado, aquellos términos para los que el predicado P(x) es cierto. En este caso *P* sería “*ser fontanero*” y *x* se referiría a todos aquellos humanos para los que “ser fontanero” sería cierto, entre ellos Juan, claro está. Podríamos decir algo como “**Ser fontanero(x)**”, por ejemplo.

Por cierto, permitidme una pequeña digresión...

Atentos al dato: Lo que yo tengo anotado en mis apuntes, el ejemplo que usó Pepe Cuena en 1974, no era “Juan es fontanero”, no, sino que era… “Juan es ***negro***”. En aquella época decir de alguien que “era negro” no tenía ninguna acepción extraña: su piel era de color negro o de algún tono más o menos chocolate, y punto.

Si ahora se me ocurre poner como ejemplo principal de la exposición, “Juan es negro”, así por las buenas, sirviéndome además para casi todos los ejemplos y diatribas posteriores, seguro que me cae *la del pulpo*. Ay, ¡cómo ha cambiado la sociedad española en cuarenta años! ¡Y qué mal llevo yo lo de la “corrección política”, eso de “personas de color”, “ciudadanos y ciudadanas”, “miembros y miembras” y demás sandeces, memeces y estupideces por el estilo...!

Sigamos. Los predicados que usamos en la vida corriente no son todos monádicos, ni mucho menos, sino que muchos de ellos se refieren a dos términos a los que ponen en relación, como en “*Luis es amigo de Juan*”, que expresaríamos como *P(x,y)* (P sería aquí “ser amigo”, y *x* e *y*, dos personas que cumplen esa relación de amistad, como en “*Ser amigo(Luis, Juan)*”), o también tres términos, como en “*Zaragoza está entre Madrid y Barcelona*”, que denotaríamos *P(x,y,z)*, o cuatro… y así sucesivamente. Serían predicados diádicos, triádicos, etc, respectivamente.

Sentadas las bases, vamos de cabeza al lío.

Si tenemos un cierto Conjunto Universal (los españoles, los hispanoparlantes, la Humanidad en pleno, las plantas de mi jardín… lo que sea), podemos definir un cierto predicado **que sea cierto para todos y cada uno de los componentes de dicho Conjunto Universal** (como en “*Todos los hombres son mortales*”), o bien **que sea cierto solamente para algunos de ellos** (como en “*Algunos hombres son fontaneros*”), o, por fin, **que no sea cierto para ninguno** (por ejemplo, “*Ninguna planta de mi jardín sabe hablar*”).

Creo que os habéis dado cuenta de que ésta es la *definición formal* de un concepto que estaba apareciendo de rondón en capítulos anteriores del libro, sobre todo en el de la implicación lógica y en el anterior, el del proceso deductivo. Me refiero a la distinción entre los predicados **Universales**, que aplican a todos los elementos que componen un cierto Conjunto Universal, y los **Particulares**, que sólo aplican a algunos elementos de dicho Conjunto Universal y no a otros.

Todo lo que hemos visto hasta ahora, la escurridiza implicación lógica y el proceso deductivo, se aplican a cualquier proposición, sea del tipo que sea. Tanto nos da que las proposiciones sean ciertas en todo el universo conocido o sólo en el rellano de mi escalera: el método para tratarlas es idéntico.

Es ahora, mediante el Cálculo de Predicados, donde se introduce el concepto Universal/Particular y donde se hacen distinciones evidentes según que un predicado sea de un tipo o de otro. Ladrillito a ladrillito, la casa cada vez es más alta y resistente…

Bueno, pues para la definición *formal* de estos predicados, que se refieren a todo un conjunto o a sólo una parte, necesitamos *algo más*, algo que nos ayude a cuantificar cuántos elementos están afectados. Este *algo más* son los **cuantificadores** ($\forall, \exists$), que junto con la negación ($\neg$) permiten expresar todos estos tipos de predicados.

Estos cuantificadores se definen de la forma siguiente:

Todos los hombres son mortales: $\forall x \in H, P(x)$ (siendo H: "Los Hombres", y P: "ser mortal", y se lee: "Para todo *x* perteneciente a *Los Hombres*, *x* es mortal").

Algunos hombres son fontaneros: $\exists x \in H, P(x)$ (siendo H: "Los Hombres", y P: "ser fontanero", y se lee: "Existe algún *x* perteneciente a *Los Hombres*, donde *x* es fontanero").

Ninguna planta de mi jardín sabe hablar: $\forall x \in J, \neg P(x)$ (siendo J: "Las Plantas de mi Jardín", y P: "saber hablar", y se lee: "Para todo *x* perteneciente a *Las Plantas de mi Jardín*, *x* no sabe hablar") (o, al menos, no sabe hablar *en español*...).

Como veis, hasta aquí no es muy complicado… Veamos ahora cuáles son las propiedades de los dos cuantificadores, el universal (*Para todo*) y el existencial (*Existe*), y cómo podemos representarlos en nuestra vieja conocida forma, como **variables booleanas extraídas directamente del Cálculo Proposicional.**

No nos acobardemos: veréis que, en realidad es todo muy sencillo e intuitivo…

$\forall x P(x)$ implica que $P(x_1) = 1, P(x_2) = 1, \ldots, P(x_n) = 1$, es decir, todos y cada uno de los $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que forman el conjunto universal estudiado cumplen que $P(x_i) = 1$

En nuestro ejemplo de "*todos los hombres son mortales*", esto quiere decir que *Juan es mortal*, *Luis es mortal*… etc, hasta *El Tato es mortal*: todos los individuos comprendidos en el conjunto de "Los Hombres" son mortales, por lo que "*mortal(x)*=1, para cualquier *x*". Y esto lo podemos formular de forma sencilla como proposiciones, como vimos en el capítulo correspondiente:

$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n) = 1$ o, en álgebra de Boole:

$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot \ldots \cdot Px(_n) = 1$,

Tranquilidad en la Sala… Esta formulita de nada no hace ni más ni menos que decir lo siguiente: si *todo x perteneciente a X cumple P(x)* implica que si tomamos por separado todos y cada uno de los "x" que integran el conjunto X, y miramos qué le pasa a P(x), entonces resulta que la proposición P(x) es cierta, o sea, 1, para todos los x. Si no fuera así, no sería "*Para todo…*".

Por tanto, la conjunción (·) de todos los P(x) individuales es 1 también (puesto que 1·1·1…·1=1, evidentemente).

Por otra parte, $\exists x P(x)$ implica que habrá algún $P(x_i)$, al menos 1, en que ocurrirá que $P(x_i) = 1$. Por ejemplo, como Juan es fontanero, $P(Juan) = 1$ (siendo P "*ser fontanero*", en este caso). En notación proposicional, esto quedaría:

$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n) = 1$ o, en álgebra de Boole:

$\exists x P(x) \equiv P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_n) = 1$.

Ahora, lo que decimos con *Existe un x perteneciente a X que cumple P(x)* es, ni más ni menos, que al menos uno de todos los x que pertenecen al conjunto X debe cumplir que P(x)=1. Por tanto, la disyunción (la suma lógica, el +) de todos los P(x) tendrá como resultado 1, dado que hay uno, al menos un P(x), ése que "*existe*", cuyo valor es 1. Entonces, por mucho que todos los demás P(x) valgan 0 (sean falsos, es decir, no son fontaneros ni siquiera en ratos libres), ese único valor verdadero (ese único Juan que sí que es un fontanero de rompe y rasga) hará verdadera la suma lógica. Sencillo, ¿no?

¿Y qué pasa con la negación de un cuantificador? Veamos:

$\neg \forall x P(x) \equiv \neg[P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)] =$

$\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \ldots \vee \neg P(x_n) =$, debido a la aplicación de la siempre tan útil Ley de De Morgan, y por tanto: $\exists x \neg P(x)$

Es natural y lógico. Decir que "*No todo x cumple P(x)*" es lo mismo que decir que "*Existe un x tal que no se cumple P(x)*", o lo que es lo mismo, "*Existe un x para el que no se cumple P(x)*", y por fin, "*Existe un x tal que P(x)=0*".

O sea, traduciendo al lenguaje natural, si no todo el mundo es fontanero, es porque hay alguien, al menos uno, yo mismo sin ir más lejos, que para la fontanería soy un negado, que no es fontanero. Una perogrullada como una casa.

¿Veis cómo en realidad las fórmulas son muy sencillas? Imponen, con tanta *x* y tanto simbolito raro, pero son evidentes.

Al contrario, es fácil demostrar que $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$. Es decir, si no existe nadie que sea fontanero es porque todo el mundo *no es* fontanero. Otra vez evidente, al traducirlo al lenguaje cotidiano.

Entonces, $\forall x P(x) = \prod_i P(x_i)$ refiriéndose al producto *lógico*, o sea, booleano, y no a la multiplicación "normal", como supongo que os habréis dado cuenta, y en cuanto al cuantificador existencial:

$$\exists x P(x) = \sum_i P(x_i)$$

Por cierto, no tendré que repetir aquí que se trata de una suma lógica, booleana, y no aritmética… ¿verdad?

Por otra parte, ¿qué pasaría si nuestro predicado no fuera monádico, sino que se refiriera a dos términos a los que pone en relación?

Pues bien, si tenemos la expresión $\forall x \forall y f(x,y)$, podemos operar con ella de la siguiente manera:

$$\forall x \forall y f(x,y) = \forall x[\forall y f(x,y)] =$$

$$\forall x[f(x,y_1) \wedge f(x,y_2) \wedge \ldots \wedge f(x,y_n)] =$$

$$[f(x_1,y_1) \wedge f(x_1,y_2) \wedge \ldots \wedge f(x_1,y_n)] \wedge$$

$$[f(x_2,y_1) \wedge f(x_2,y_2) \wedge \ldots \wedge f(x_2,y_n)] \wedge \ldots$$

$$\wedge[f(x_n,y_1) \wedge f(x_n,y_2) \wedge \ldots \wedge f(x_n,y_n]) =$$

$$\forall x \forall y f(x,y) = \prod_{i,j} f(x_{i,j}).$$

Este tocho de fórmulas es intimidante, de acuerdo, pero en lenguaje cotidiano es, nuevamente, una obviedad. En realidad no

quiere decir ni más ni menos que lo siguiente: que todas las posibles combinaciones de P(x,y), tomemos como tomemos los *x's* y lo *y's*, los emparejemos como los emparejemos, tendrán siempre como resultado 1, y por tanto, la conjunción (con Y, con ·) de todas ellas, como todas valen 1, será 1 también.

Así, por ejemplo, si decimos que **en un pueblo todo el mundo es amigo de todo el mundo**, con lo que el predicado básico es *Ser Amigo(x,y)*, que valora si x e y son amigos, y valdrá 1 si sí que son amigos, y 0 si no lo son (y no, no vale un *0,5* si sólo se conocen pero no son íntimos... sólo 0 o 1) entonces, elijamos como elijamos las *x's y* las *y's*, sean quienes sean esos x e y, aunque vivan en los extremos más alejados del pueblo, son efectivamente amigos, así que para ellos el predicado *Ser Amigo(x,y)* es igual a *1*, y por tanto la conjunción (el producto lógico) de todos ellos será 1 también. No es tan difícil, como veis.

Para tres variables (*x,y,z*), cuatro, etc, procederíamos de igual manera, generalizando esta misma fórmula.

Y naturalmente, dada la simetría del álgebra de Boole, podemos de la misma forma asegurar que $\exists x \exists y f(x,y) = \sum_{i,j} f(x_{i,j})$

No lo voy a escribir, pero tan sólo cambiando el + y el · sale del tirón…

Por otra parte, es sencillo demostrar que los cuantificadores pueden "saltar" por los signos de conjunción o disyunción a través de las funciones. Veamos (y que no os intimiden las fórmulas, que parecen muy complicadas pero no lo son en absoluto).

En primer lugar, supongamos que tenemos los dos siguientes predicados individuales:

p : "*Hace frío*", y

$\forall y g(y)$: "*Todas las vacas tienen cuernos*", o, mejor expresado, "*Para todo x perteneciente al conjunto de las vacas, x tiene cuernos*".

Entonces el predicado $p \wedge \forall y g(y)$ significaría "*Hace frío y todas las vacas tienen cuernos*".

Es evidente que "*p*" es aquí un predicado que no tiene nada que ver con la variable *y*, es independiente a ella (porque hace frío, o no, independientemente de que las vacas tengan o no cuernos).

Operemos ahora un poco con este predicado compuesto:

$p \wedge \forall y g(y) =$

$p \wedge [g(y_1) \wedge g(y_2) \wedge \ldots \wedge g(y_n)] =$

$[p \wedge [g(y_1)] \wedge [p \wedge [g(y_2)] \wedge \ldots \wedge [p \wedge [g(y_n)] =$

$\forall y[p \wedge g(y)]$

Es decir: $p \wedge \forall y g(y) = \forall y[p \wedge g(y)]$, lo que quiere decir en nuestro ejemplo que "*Para todo x perteneciente al conjunto de las vacas, hace frío y x tiene cuernos*". Como veréis es incluso realmente difícil expresar esta sutil distinción en español.

Ahora veamos qué le ocurre a este otro predicado: $\forall x f(x) \wedge \forall y g(y)$

Sustituyendo los cuantificadores universales por su equivalente como conjunción de todos los predicados, tenemos:

$\forall x f(x) \wedge \forall y g(y) =$

$[f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_n)] \wedge [g(y_1) \wedge \ldots \wedge g(y_n)] =$ Aplicando la distributiva:

$[f(x_1) \wedge (g(y_1) \wedge \ldots \wedge g(y_n))] \wedge$

$[f(x_2) \wedge (g(y_1) \wedge \ldots \wedge g(y_n))] \wedge$

. . .

$[f(x_n) \wedge (g(y_1) \wedge \ldots \wedge g(y_n))] =$ y sacando factor común:

$[f(x_1) \wedge \forall y g(y)] \wedge [f(x_2) \wedge \forall y g(y)] \wedge \ldots [f(x_n) \wedge \forall y g(y)]$

Aquí, cada predicado $f(x_i)$ es independiente de $\forall y g(y)$ (aplica a la variable *x*, que es obviamente distinta de *y*), así que podemos aplicar la propiedad que demostramos unas líneas más arriba.

Queda que:

$[f(x_1) \wedge \forall y g(y)] \wedge [f(x_2) \wedge \forall y g(y)] \wedge ...[f(x_n) \wedge \forall y g(y)] =$

$\forall y[f(x_1) \wedge g(y)] \wedge \forall y[f(x_2) \wedge g(y)] \wedge ... \wedge \forall y[f(x_n) \wedge g(y)] =$

$\forall x[\forall y(f(x) \wedge g(y))] = \forall x \forall y[f(x) \wedge g(y)]$

Entonces podemos finalmente afirmar que:

$\forall x f(x) \wedge \forall y g(y) = \forall x \forall y[f(x) \wedge g(y)]$ y que el cuantificador "Para todo" puede saltar como si fuera un vulgar saltimbanqui a través de la fórmula de los predicados.

Análogamente (y esto ya no lo demuestro: es prácticamente inmediato en base a lo anterior):

$\exists x f(x) \wedge \exists y g(y) = \exists x \exists y[f(x) \wedge g(y)]$ y por fin:

$\forall x f(x) \wedge \exists y g(y) = \forall x \exists y[f(x) \wedge g(y)]$ Bello, ¿no?

Se define entonces la **Forma Normal PRENEX** para representar fórmulas en Cálculo de Predicados, donde las funciones adoptan la forma siguiente:

Primero, todos los cuantificadores, en cabeza de la fórmula, aprovechando que pueden "saltar" a través de ellas.

Después, todas las expresiones, ligadas exclusivamente por conjunciones, $\wedge$, o disyunciones, $\vee$, y donde la negación, las que haya, están aplicadas exclusivamente a las proposiciones simples, no a expresiones.

Esta última parte es sencilla de ver, pues ya vimos cómo se podía convertir cualquier expresión booleana a una suma de productos, para llegar a expresar toda función booleana en su Forma Normal Disyuntiva (o Conjuntiva, tanto da)… y dado que los cuantificadores pueden "saltar" a través de la expresión (siempre que se refieran a las propias variables sobre las que saltan, o bien sean independientes de ellas), no es muy difícil llegar a escribir cualquier predicado, por compleja que sea su expresión, en Forma Norma PRENEX.

Con ello se consigue tener una forma de expresión que permite comparar diferentes expresiones con predicados, para ver si son iguales o, si no lo son, en qué se diferencian (algo similar a lo que se obtenía mediante la Forma Normal Disyuntiva, si os acordáis).

Toca ahora un ejemplo. Se pide escribir en Forma Normal PRENEX la siguiente expresión:

$\neg\exists x[p(x) \Longrightarrow \forall y q(y)] =$

Veamos…

$\neg\exists x[p(x) \Longrightarrow \forall y q(y)] =$ en primer lugar, una simplificación de la implicación "$\Longrightarrow$" …

$\neg\exists x[\neg p(x) \vee \forall y q(y)] =$ ahora un cambio del cuantificador negado: *No existe ningún x tal que R(x)* es lo mismo que *Para Todo x se cumple que No R(x).* R(x) aquí hace referencia a la expresión compleja que hay dentro del paréntesis…

$\forall x \neg[\neg p(x) \vee \forall y q(y)] =$ la negación entra dentro del paréntesis, y en el camino cambia el $\vee$ por el $\wedge$, según la Ley de De Morgan…

$\forall x[p(x) \wedge \neg\forall y q(y)] =$ otro nuevo cambio de cuantificador negado: *No todo y cumple Q(y)* es lo mismo que *Existe un y tal que No se cumple Q(y)*…

$\forall x[p(x) \wedge \exists y \neg q(y)] =$ ahora el cuantificador existencial salta, a modo de saltimbanqui, a través del paréntesis…

$\forall x \exists y[p(x) \wedge \neg q(y)]$, *et voilà*!, la expresión resultante ya está escrita en Forma Normal PRENEX.

Vaya. Ha sido éste un capítulo relativamente cortito para mis costumbres. Pero otra vez intenso. Creo.

Se ha terminado el mes de abril… el de 1974. Sólo quedan un par de clases, como mucho, antes de los exámenes finales, ¡y eso si no hacemos huelga por alguna importante razón! A mediados de los setenta del siglo pasado ésa era una situación bastante común… los únicos que podían hacer huelga sin terminar en el trullo éramos los estudiantes, aunque la autoridad competente de entonces lo llamaba más bien "hacer pellas".

Usamos, pues, esas dos clases finales para terminar con algún detalle y hacer ejercicios para ejercitarnos antes de dichos exámenes… cosa que explicaré en el próximo capítulo, que será el último de este libro sobre *Eso que llamamos Lógica* que rememora las clases que Don José Cuena nos impartió a nosotros, los alumnos de Segundo de Informática aquel *calentito* año de 1974.

… Sí, *calentito*. En diciembre de 1973 fue asesinado por ETA el Almirante Carrero Blanco, a la sazón Presidente del Gobierno del General Franco. Toda la primavera de 1974 fue de lo más movidita, con huelgas (prohibidas), manifestaciones (prohibidas), declaraciones (prohibidas) y demostraciones (prohibidas). Y todas ellas reprimidas, claro. Franco, ya con más de 80 años y enfermo de Parkinson, estaba cada día más decrépito (falleció en noviembre del año siguiente), y el ambiente general en España ante el inminente cambio de ciclo oscilaba entre el miedo y la esperanza.

Años muy interesantes, aquellos. *Interesantes*, por decirlo de alguna manera… ¡Y nosotros, pobres pipiolos, intentando aprender y aplicar la *Lógica*!!

IX- La inferencia lógica

En el capítulo anterior de este libro sobre Lógica de aplicación para la informática que finaliza con este capítulo se definió el Cálculo de Predicados como una generalización del Cálculo Proposicional que vimos algunos capítulos atrás…

Repito una vez más que para confeccionar este escrito estoy usando extensivamente los apuntes de la asignatura de "Metodología" de aquel año académico 1973-74, en Segundo de Informática, asignatura impartida entonces por el desgraciadamente desaparecido profesor D. José Cuena Bartolomé.



José Cuena Bartolomé, 1987.

Estamos llegando ya al final de la asignatura (y del curso). Estamos ya con los calores de mayo y los sudores fríos que a todos nos dan los inminentes exámenes finales. D. José dedicó estas últimísimas clases a acabar de perfilar el Cálculo de Predicados y a hacer ejercicios para preparar los dichosos finales. Pero descuidad, yo no voy a examinaros de nada… allá cada cual con lo que haya aprendido (o *desaprendido*, quién sabe) leyendo este librito tan amarillento como los añejos apuntes en que se basa…

Hace un par de capítulos vimos cómo era, desde el punto de vista del cálculo proposicional, el proceso de deducción.

Recordemos que, teniendo una serie de premisas que se suponen ciertas, se puede deducir una nueva proposición… Suponiendo las premisas $P_1, P_2 \cdots P_n$, esto lo representábamos de la forma: $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \Longrightarrow E = 1$, es decir, la conjunción de todas las premisas implicando la conclusión tiene que ser cierta. Esto era, ni más ni menos, el *modus ponens*, si os acordáis. Y nos indica que, si todas y cada una de las premisas son ciertas, **y sólo en ese caso**, entonces la conclusión lo es también.

Vamos a generalizar este proceso, utilizando los cuantificadores universal (*Para Todo*: $\forall$) y existencial (*Existe*: $\exists$), para definir el proceso de inferencia lógica. Para ello, primero definiremos las diferentes formas de deducción que emanan de los cuantificadores. Tienen todas ellas nombres bastante intimidatorios, pero… son no sólo sencillas, sino evidentes; más aún, como decía mi abuela, son *de cajón de madera de pino*…

Ved cómo es así:

Especificación Universal

$$\frac{\forall x A(x)}{A(y)}$$

Esto quiere decir que si para todo x se cumple A(x), evidentemente el predicado A se cumplirá también para todos los elementos *y*.

Así, si tenemos la aserción siguiente: **a todo español le gustan los toros** (es decir, *para todo hombre perteneciente al conjunto de los españoles, "le gustan los toros" es cierto*), podemos convertirla simplemente en "**a los españoles les gustan los toros**". En lenguaje corriente tendríamos dificultades en distinguir una forma de decir las cosas de la otra… porque son equivalentes, eso es.

Y, evidentemente, la frase es un ejemplo. Porque, en realidad, no a todos los españoles les gustan los toros, yo mismo entre ellos: la premisa inicial es falsa, así que, por muy bien hecho

que esté el razonamiento, que lo está, su conclusión no es válida, puesto que el predicado inicial no lo es.

Recordad siempre: *un* ***razonamiento*** *puede ser* ***correcto o incorrecto****, no verdadero o falso*. Verdaderas o falsas son las frases, las aserciones, los predicados que se usan en el razonamiento, pero nunca el razonamiento en sí.

También es cierta la contraria de la Especificación Universal, llamada:

Generalización Universal

$$\frac{A(x)}{\forall y A(y)}$$

Si siempre se cumple A(x), entonces también se cumple que para todo y se cumple A(y). Si el predicado A es "**Los turcos tienen bigote**", es bastante sencillo ver que "**para todo x perteneciente a *los hombres turcos*, x tiene bigote**". Incluso, nuevamente, en el lenguaje corriente ambas formas de hablar ("*los (hombres) turcos tienen bigote*" y "*todo (hombre) turco tiene bigote*") son equivalentes, por no decir indistinguibles. En Lógica formal, lo son también, puesto que se infieren una de la otra, y viceversa: si no fuera así, ya me contaréis para qué serviría la Lógica…

En el ejemplo paradigmático de la filosofía clásica, de "*los hombres son mortales*", proposición normalmente dada por verdadera, puesto que no se ha observado ningún contraejemplo hasta el momento, según esta generalización universal se convertiría en "*Todo hombre es mortal*" (para todo *x* perteneciente a "*Los Hombres*", *x* es mortal), llegando así a convertirse en Ley Universal.

Sigamos.

Especificación Existencial

$$\frac{\exists x A(x)}{A(\alpha)}$$

Aquí α representa un cierto elemento que cumple el predicado A. Alguno debe de haber, claro, pues si no, no sería cierta la especificación “Existe un x tal que A(x)”.

Si decimos que “*existe algún inglés que sabe hablar correctamente el español*”, por ejemplo, es evidente que para un cierto valor de *x* perteneciente a “los ingleses”, digamos un tal John Smith que estudió en los Salesianos de La Almunia de Doña Godina, se cumplirá que *ese caballero inglés en concreto* habla español correctamente. Si no hay disponible en las cercanías ningún John Smith hispanoparlante, entonces la propia premisa de especificación existencial sería falsa, puesto que NO existiría ningún inglés que hable español como es debido…

Nuevamente, su contraria:

Generalización Existencial

$$\frac{A(\alpha)}{\exists x A(x)}$$

Si hay un cierto elemento α que cumple A, entonces existe al menos un *x* tal que A(x) se cumple, que será precisamente ese elemento α, al menos. Efectivamente, si conocemos a un tal Mike Taylor que estudió en los Escolapios de Puente del Arzobispo y habla en español por los codos, entonces podemos afirmar sin titubear que “*existe al menos un inglés que habla español correctamente*”. El tal Mike Taylor, al menos.

No creo que haya que explicar más estas formulitas: son bastante evidentes, casi infantiles, perogrullescas… ¡y potentes!

Armados con ellas y con lo que ya sabemos de cálculo de predicados y proposicional, somos capaces de resolver inferencias lógicas como el que lava… en la Edad Media nos hubiéramos podido ganar bien la vida como resolvedores (¡o inventores!) de silogismos… eso si antes no nos habían quemado en la hoguera, por brujos.

Veamos algunos ejemplos. Ahí va el primero de ellos:

1. – Ningún ser humano es cuadrúpedo.

2. – Todos los pigmeos son humanos

Conclusión: Ningún pigmeo es cuadrúpedo

Por cierto: Qué cosas pasaban… en la clase anterior aparecían negros, por aquello de "Juan es negro", y aquí aparecen pigmeos… que también son negros. Y nadie se extrañó ni lo tomó como ofensivo para nadie. Ya digo yo que la corrección política imperante en la actualidad no había hecho todavía su aparición en los años 70.

Veamos cómo llegamos, lógicamente, a la conclusión de que nuestros queridos aborígenes africanos de baja estatura no se desplazan normalmente sobre cuatro patas, cosa por otra parte bastante sencilla de demostrar simplemente viendo una foto de pigmeos. Pero vamos a hacerlo como preconizan las reglas de la Lógica, como si no lo supiéramos.

Primero, definamos las proposiciones individuales:

H(x): *x* es un ser humano

C(x): *x* es un cuadrúpedo

P(x): *x* es pigmeo

Una vez hecho esto, definimos ahora los predicados 1 y 2, es decir, las dos premisas, en términos del cálculo lógico:

$1. - \forall x[H(x) \implies \neg C(x)]$

$2. - \forall x[P(x) \implies H(x)]$

Se entiende, ¿no? Bueno: por si acaso no se ve…

La primera: *Para todo x, si x es un hombre, entonces x no es un cuadrúpedo*.

La segunda: *Para todo x, si x es un pigmeo, entonces x es un hombre.*

¿Queda claro? Supongo que sí. Entonces, vamos a operar un poco con cada uno de los dos predicados originales, aplicando en primer lugar la Especificación Universal:

$$\frac{1 - \forall x[H(x) \implies \neg C(x)]}{H(y) \implies \neg C(y)}$$

$$\frac{2 - \forall x[P(x) \implies H(x)]}{P(y) \implies H(y)}$$

Bien, ya sabemos, pues, que los "*humanos no son cuadrúpedos*", y que "*los pigmeos son humanos*". Con este par de especificaciones nos hemos librado (de momento) de los cuantificadores, con lo que nos han quedado dos proposiciones de lo más normalitas. Por lo tanto, podemos aplicar sin más las reglas del cálculo proposicional que conocemos.

Tomamos ahora ambas conclusiones y:

$$\frac{\begin{array}{l} P(y) \implies H(y) \\ H(y) \implies \neg C(y) \end{array}}{P(y) \implies \neg C(y)}$$

Naturalmente: Si A implica B y B implica C, entonces, por la propiedad transitiva, A implica C. Si aún tenéis dudas, pensad en conjuntos, en relaciones de pertenencia entre los conjuntos involucrados, y lo veréis clarísimo.

En definitiva: "*Los pigmeos no son cuadrúpedos*". Ya casi está. Ahora sólo nos queda generalizar:

$$\frac{P(y) \implies \neg C(y)}{\forall x[P(x) \implies \neg C(x)]}$$

O sea, que **todo Pigmeo no es cuadrúpedo**. Es decir: *Para todo x, si x es Pigmeo, entonces x no es cuadrúpedo*. Como se quería demostrar.

¡Menudo descubrimiento! Pero es lo que hay.

En el mundo de los silogismos, siempre que mi escuálida memoria no me falle, éste de los pigmeos es un ejemplo del tipo "***Celarent***", es decir: Universal Negativo + Universal Positivo dan como conclusión otro Universal Negativo. En este caso, Premisa-Universal Negativo: "*Ningún humano es cuadrúpedo*"; Premisa-Universal Positivo: "*Todos los pigmeos son humanos*"; Conclusión (Universal Negativo): "*Ningún pigmeo es cuadrúpedo*".

Así se las gastaban los monjes medievales… Había decenas y decenas de tipos de silogismos, que se sabían de memoria.

Y, en cambio, nosotros, en aquella "*Metodología*" de Segundo de Informática, nunca jamás citamos siquiera el nombre "*Silogismo*", cuando no hacíamos más que resolver uno tras otro, aunque tampoco muchos, no os creáis.

Al final del capítulo dedicaré algunos párrafos a describir, muy por encima (porque uno no da para más), cómo eran los silogismos y cómo se usaban, por si alguno de vosotros tiene curiosidad.

Pongamos un último ejemplo. De hecho yo tengo cinco de ellos en mis descoloridos apuntes del siglo pasado, pero no voy a torturaros con más… si es caso, dejaré uno último para que quien quiera divertirse un rato, pueda hacerlo… pero a solas. Veamos este último ejemplo:

1 – Todos los números racionales son números reales

2 – Algún número racional es entero.

Conclusión: Algunos números reales son enteros

De Perogrullo, sí, pero hay que demostrarlo, que, si no, nuestros amigos matemáticos se enfadan mucho. Veamos primero los predicados involucrados:

Q(x): x es racional.

R(x): x es real.

E(x): x es entero.

Las premisas son las siguientes:

$1-\forall x[Q(x) \Longrightarrow R(x)]$ **Traducción**: *Para todo número x que es racional entonces x es real*.

$2-\exists x[Q(x) \land E(x)]$ **Traducción:** *Existe al menos un número x tal que es simultáneamente racional y entero*.

Y la conclusión propuesta es:

$\exists x[R(x) \land E(x)]$ **Traducción:** Existe al *menos un número x tal que x es simultáneamente real y entero.*

Evidente, ¿no? Espero que sí. Venga, vamos a operar otro poco.

Por una parte, mediante especificación universal:

$\underline{1-\forall x[Q(x) \Longrightarrow R(x)]}$

$\underline{Q(y) \Longrightarrow R(y)}$

$Q(\alpha) \Longrightarrow R(\alpha)$

Por otra parte, y ahora mediante especificación existencial:

$\underline{2-\exists x[Q(x) \land E(x)]}$

$Q(\alpha) \land E(\alpha)$

Al ser éste último un predicado conjugado, o sea, los dos predicados están unidos con "Y", para ser cierto deben ser ciertos a la vez $Q(\alpha)$ y $E(\alpha)$; podemos, pues, tomarlos independientemente, y eso es justo lo que vamos a hacer, uniéndolos por partes con el otro enunciado.

$Q(\alpha) \Longrightarrow R(\alpha)$

$\underline{Q(\alpha)}$

$R(\alpha)$ (Esto es un *modus ponens* de lo más normalito)

$\underline{E(\alpha)}$ (La otra parte de la conjunción)

$\underline{R(\alpha) \land E(\alpha)}$, y por generalización existencial:

$\exists x[R(x) \land E(x)]$, que era la conclusión buscada.

O sea, efectivamente algunos racionales son, sorpresivamente, también enteros.

El último ejemplo que prometí, para aquellos masoquistas que quieran ejercitarse… Demostrar si la siguiente inferencia lógica es correcta:

1 – Algunos franceses son amigos de todos los monegascos.

2 – Ningún francés es amigo de los aficionados al cricket.

Conclusión: Ningún monegasco es aficionado al cricket.

No es difícil, ni mucho menos. Ya podéis lidiar con silogismos sin despeinaros, tengan una premisa, dos, tres o las que hagan falta… ya no hace falta cantar, como yo canté en mi lejanísimo Bachillerato, aquello de "*Barbara, Celarent, Darii, Ferio… du-duá, du-duá…*". Sí, es que en mis tiempos se aprendían muchas cosas cantando, la primera de ellas la tabla de multiplicar, naturalmente: dos por una es dos; dos por doooos, cuatro; dos por treees, seis… y así hasta el infinito. Y más allá.

El caso es que he citado bastantes veces a lo largo del libro eso de "**los silogismos**", y acabo de explicar que conociendo lo que hoy he terminado de exponer sobre Lógica y sobre inferencias lógicas, no hace falta conocer nada acerca de silogismos, y que se podía olvidar uno tranquilamente de lo del "Bárbara, Celarent, Darii"…

Podría parecer que estoy menospreciándolos como algo anticuado y obsoleto, pero no es así, en absoluto. **Los silogismos fueron la piedra angular sobre la que se basó toda la ciencia medieval** e incluso la de los Siglos XVI, XVII y XVIII.

Muchos grandes pensadores, algunos conocidos, como es el caso del gran Guillermo de Ockham, pero la gran mayoría anónimos, aportaron a lo largo de los siglos su grano de arena al *corpus* de los silogismos…

Yo los estudié, no mucho, pero sí lo suficiente, en mi aún más lejana Filosofía de Quinto de Bachillerato (tenía yo catorce o quince años por entonces), y la verdad es que me acuerdo más bien poco.

Pero parece que en nuestros tiempos ya no se explican los silogismos. Nada, o prácticamente nada.

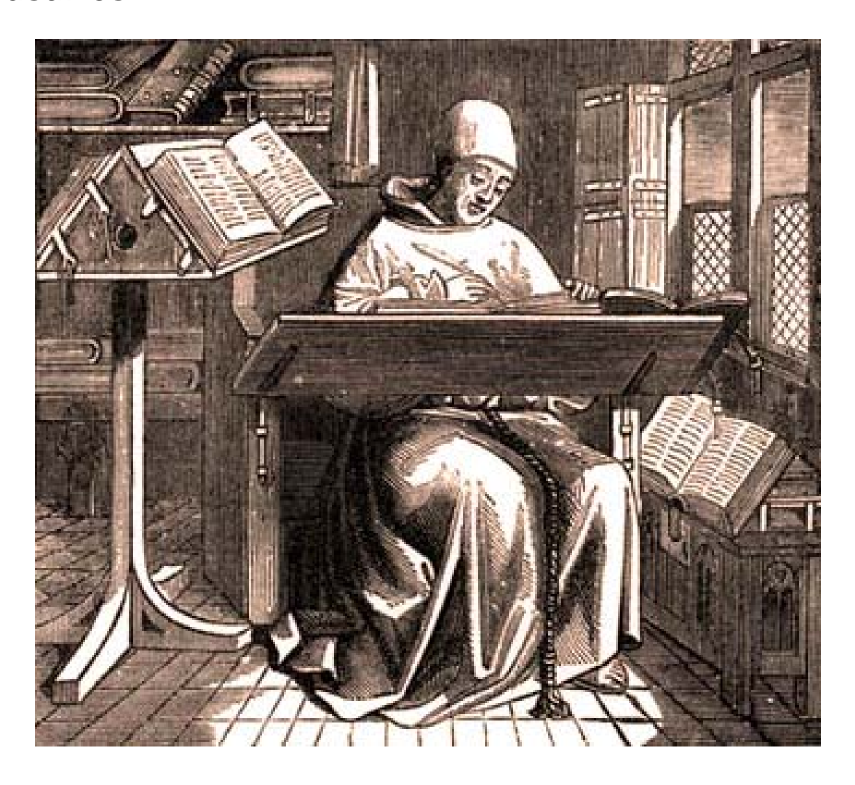
Es lógico, en realidad: sabiendo álgebra de Boole, cálculo proposicional y de predicados, todo lo demás sale solo.

No obstante, aunque sólo sea por lo importantes que fueron en su día, voy a dedicarles algunos párrafos para explicar a grandes rasgos qué eran y cómo se usaban los silogismos en la oscura Edad medieval.

LOS SILOGISMOS

O cómo se razonaba en la Edad Media

Fue Aristóteles, nada menos, quien definió por primera vez el término **silogismo** (que en griego clásico quiere decir "razonamiento"), aunque luego fueron los escolásticos los que afinaron su definición, los estudiaron a conciencia y explicaron cómo usarlos.



Monje en su scriptorium, calculando silogismos.

Para definir un silogismo se precisan tres proposiciones: Una, denominada "*Mayor*", otra, "*Menor*" y otra, por fin, llamada "*Conclusión*", que, como podéis imaginar, es la que se deduce de las otras dos proposiciones, las premisas. Estas proposiciones deben tener en total tres términos, denominados *mayor*, *menor* y *medio*, y además resulta que hay que… bueno, la cosa se empieza a complicar.

Mejor ver un ejemplo clásico (pero clásico – clásico):

Proposición Mayor: "*Todos los hombres son mortales*"

Proposición Menor: "*Sócrates es un hombre*"

Conclusión: "*Sócrates es mortal*"

Ya veis que se trata de un *modus ponens* de lo más sencillito, de una inferencia muy evidente, según acabamos de observar. Sabiendo *cálculo proposicional y de predicados* todo esto está chupado, es sencillísimo. Sólo había un pequeño problema: ¡¡**No estaban inventados**!! En el Siglo XII toda noción de cálculo, y no digamos de álgebra, estaba en pañales; ni siquiera se había importado de los indios, pasando por los árabes, el sistema de notación numérico actual, con su cero tan redondito incluido.

¿Cómo se las apañaron, pues, Tomás de Aquino, Guillermo de Ockham y demás escolásticos de rompe y rasga para lidiar con cualesquiera razonamientos…? **De Memoria.** Se aprendían los silogismos de memoria.

Bueno, en realidad no se dedicaban a hacer *cualesquiera* razonamientos, no. Casi todos eran para demostrar ésta o aquella faceta de la divinidad, para demostrar la infalibilidad del Papa o la venida del Espíritu Santo o la mendacidad de algún obispo casquivano… La poquísima cultura que subsistía en Occidente durante los oscuros años medievales se guardaba o practicaba en monasterios y conventos. Sin excepción, silogismos incluidos.

¿Cómo se las apañaron? Primero, codificaron los diferentes predicados según su tipo, de la forma siguiente:

Universal afirmativo: Letra **A.** (Traducido: *Para todo x, ocurre P(x)*)

Universal negativo: Letra **E.** (Traducido: *Para todo x, ocurre No P(x)*)

Particular afirmativo: Letra **I.** (Traducido: *Existe un x en que ocurre P(x)*)

Particular negativo: Letra **O.** (Traducido: *Existe un x en que ocurre No P(x)*)

Luego, siglo tras siglo, en base a sesudos razonamientos y pruebas llegaron a determinar qué tipos de razonamientos eran válidos y cuáles no. Razonamientos en los que no podían reducir fórmulas según el álgebra de Boole o las Leyes de De Morgan, porque tanto a George Boole como a Augustus De Morgan les faltaban quinientos años o más para nacer, o sea, todo *a puro pelo*.

Los dividieron y categorizaron una y otra vez: en hipotéticos y disyuntivos, condicionales, *chiripitifláuticos* y qué sé yo, dando así lugar a diferentes figuras, modos, sistemas…

Luego, a cada figura le asignaron una o varias consonantes iniciales que indicaban de qué figura era el silogismo. No me preguntéis más detalles sobre esto de las figuras y tal, que no llego más que hasta aquí.

Teniendo tres predicados y cuatro tipos de predicado posibles (A,E,I,O), encontraron que había 64 posibles modos de ordenarlos, a base de escribir todos uno a uno y contarlos. No creo que supieran siquiera que las variaciones con repetición de cuatro tipos tomados de tres en tres era "*4 elevado a 3*"… ni siquiera sabían qué rayos era una "*variación con repetición*", pero sí sabían que en total había 64 modos posibles, del A-A-A al O-O-O.

También se dieron cuenta de que no todos los modos posibles eran silogismos correctos. Por ejemplo, si las dos premisas son negativas, no se puede inferir conclusión alguna, como en "Ninguna planta de mi jardín sabe hablar"; "Mi perro Toby (o mi primo Luis) no es una planta"… No es posible sacar ninguna conclusión sobre si Toby (o mi primo) sabe o no sabe hablar en base a estas dos premisas iniciales, y por lo tanto no encontraréis ningún silogismo que empiece por E-E o por E-O.

Así, de los 64 modos posibles, tras siglos de estudio, encontraron que sólo 19 eran correctos. ¿Cómo hacer para recordarlos, en aquellos tiempos en que la matemática simplemente no existía? Fácil: escribieron esos 19 *modos* válidos que encontraron, de forma exhaustiva, buscando palabras mnemotécnicas que les ayudaran a recordarlas. De ahí lo de "*Barbara*, *Celarent*, *Darii*, *Ferio*…". Y se las aprendieron de memoria. Ventajas de no tener televisión: no tenían que aprenderse la alineación de ningún equipo de nada ni la relación de sucesivos amantes, líos y querid@s de cada concursante de cada edición de Gran Hermano…

Así, **Barbara** señala un razonamiento en el que todas las proposiciones son universales afirmativas (A-A-A: b**A**rb**A**r**A**, para que se vea más claro), por ejemplo: "Todos los hombres son mortales"; "Todos los pigmeos son hombres"; Conclusión: "Todos los pigmeos son mortales".

En nuestro africano ejemplo de hace unos párrafos, el de los pigmeos: "Ningún hombre es cuadrúpedo", "Todos los pigmeos son hombres"; Conclusión: "Ningún pigmeo es cuadrúpedo", es un silogismo de tipo **Celarent (EAE: cElArEnt).** Sus proposiciones son: Universal Negativo (E)-Universal Afirmativo (A)-Universal Negativo (E).

En el tan famoso de "Todos los hombres son mortales"; "Sócrates es un hombre"; Conclusión: "Sócrates es mortal", las proposiciones son: Universal Afirmativo (A), Particular Afirmativo (I), Particular Afirmativo (I)… es un **Darii** (dArII, para que se vea más claro). Y así, con todo.

¿Cómo usaban esto los filósofos medievales? Bien, estaban ellos elucubrando sobre la *flamigerez* de los *bordosíes*, sin ir más lejos, y se planteaban entonces el siguiente razonamiento:

Premisa Mayor: "*Nadie que esfirulice a un churrimano es un flamígero descendente*";

Premisa Menor: "*Tengo un bordosí emperifollado que esfiruliza a un churrimano*".

¿Qué conclusión puedo yo sacar de estas dos premisas tan *esfirulizadoras*?

Como no sé álgebra de Boole… lo llevo claro. Pero, por suerte, en su lugar, **tengo mi lista de silogismos**…

A ver… la primera premisa es una Universal Negativa: una E. La segunda es un Particular Afirmativo: una I. Luego tengo que buscar en la lista de silogismos válidos y aceptados por los Padres de la Iglesia (no vaya a cometer herejía y acabe en el potro de tortura) a ver si hay alguno con ese comienzo "**E-I**", aunque lo normal es que no me haga falta, porque me los sepa de memoria… Pues sí, hay uno: **Festino**. La tercera sílaba de *Festino* lleva una O. Eso quiere decir que la conclusión es de tipo **O**: particular negativo. Y como Festino empieza por F, es de

no sé qué figura (según la Wikipedia, de la segunda figura, signifique lo que signifique eso y tenga las consecuencias que eso tenga).

O sea, **la conclusión sería** "*Este bordosí emperifollado esfirulizador no es un flamígero descendente*". O algo parecido…

Bueno, más o menos así sería el método. Además, para ayudarse en su tarea, inventaron uno de los primeros prontuarios de la historia: las cartas silogísticas. No me preguntéis cómo se usaban. No me acuerdo, si es que alguna vez lo supe.

La realidad es que, aunque soy viejo, nunca llegué a usar activamente ni las cartas silogísticas ni los propios silogismos (ya habían pasado de moda cien años antes de que yo naciera), y los tengo bastante olvidados. Espero, eso sí, que gracias a estas pocas palabras os quede, al menos, una idea de cómo funcionaba todo el asunto.

Y, como decía Forrest Gump, "Esto es todo lo que tengo que decir sobre esto". Nada más sé de silogismos, así que nada más puedo contar.

En fin. El curso académico se acababa. Don José nos propuso dos o tres ejercicios más, luego… Vinieron los exámenes parciales (en las asignaturas que los hacían, que no eran tantas), y después los finales. Aprobé todo, incluyendo esta tan lógica asignatura de "Metodología". Con buena nota, creo recordar. La mayoría de mis compañeros y yo estuvimos de acuerdo en que estas clases impartidas por Pepe Cuena habían sido de las más divertidas y útiles que habíamos recibido en nuestras vidas.

El verano siguiente me dediqué a cumplir mis obligaciones como ciudadano español de pro de la época: me fui la *mili*, el Servicio Militar Obligatorio, que terminé año y pico después, simultaneando las guardias y las imaginarias con el curso de Tercero de Informática… Y fui a la mili aunque aún era menor de edad: en aquellos años la mayoría de edad no se alcanzaba hasta cumplir los 21 años, y yo aún no los tenía. Sí, era menor de edad para casi todo, menos para ir pegando tiros por ahí. Y en los ratos libres, estudiaba.

En fin: no me fue muy bien en ninguna de las dos actividades: del curso me quedaron unas cuantas asignaturas para el año siguiente (aunque aprobé dos o tres, que algo es algo), y en la mili comprobé que toda la estupenda Lógica que había aprendido ese curso 1973-1974 no me sirvió absolutamente de nada: no puede decirse que el Servicio Militar de aquellos años se rigiera por parámetros excesivamente *lógicos*. Menos mal que no estábamos en guerra con nadie, que si no…

Queridos lectores, aquí se acaba esta historia. **Y el libro**.

Seguramente os habrá aburrido mortalmente a la mayoría (aunque ellos seguramente no leerán esta breve despedida, pues lo habrían dejado mucho antes), a otros os habrá parecido limitada, pedante y, sobre todo, ingenua, y, por fin, a dos o tres de vosotros igual os ha servido para algo, os ha ayudado a entender un poco cómo se razona, y sobre todo cómo razonamos los informáticos… perdón, cómo *razonábamos* los informáticos de los tiempos del cuplé.

Con que alguno de vosotros haya aprendido algo, me doy por satisfecho.

Hasta otra.

Pero, un momento, antes de terminar este último capítulo del libro y de dejaros con los Apéndices, un último consejo de un viejo que en muchas ocasiones no ha hecho caso de sus propios consejos (ya sabéis el refrán: "*consejos vendo; que para mí, no tengo*"):

Disfrutad de la vida, mientras podáis.

Apéndice I - Solución al Problema del Maquinista.

En el capítulo IV, dedicado al Álgebra de Conjuntos, enuncié un conocido problema: **El problema del maquinista,** un añejo problema lógico que ha dado dolores de cabeza a varias generaciones de estudiantes, aficionados y curiosos. En este Apéndice voy a dar la solución, aunque recomiendo encarecidamente a quienes hayáis llegado hasta aquí que intentéis resolverlo por vuestros medios, pues tenéis recursos más que suficientes para hacerlo. Y os divertiréis mucho, os los aseguro.

Su enunciado es el siguiente:

"En un tren viajan tres empleados de ferrocarriles, el jefe de tren, el maquinista y el camarero, de nombres White, Black y Brown, aunque no necesariamente en ese orden, y viajan también tres viajeros que tienen los mismos nombres, White, Black y Brown. Tenemos además los siguientes datos sobre ellos:

"El viajero Black vive en Washington, pero el camarero vive a mitad de camino entre Washington y New York, mientras que el viajero que se llama igual que el camarero vive en New York. El viajero Brown gana doscientos mil dólares justos al año. El empleado de ferrocarriles de nombre White gana siempre al ajedrez al jefe del tren. Uno de los viajeros es vecino del camarero y gana exactamente, hasta el último céntimo, el triple que él.

"Y la pregunta es…

¿Cómo se llama el maquinista?"

Bien, para resolverlo definiremos primero los conjuntos más importantes de nuestro "Conjunto Universal" de tan sólo seis personas:

Ferro: los Ferroviarios.

Viaje: los Viajeros.

Ambos conjuntos son disjuntos (Ferro·Viaje=0, debido a que o los protagonistas de la historia son viajeros o son ferroviarios, pero no ambas cosas a la vez (aunque en realidad no quepa la menor duda de que, técnicamente, los ferroviarios del tren también viajan, ¿no?), y constan de exactamente tres elementos cada uno.

Por otra parte, tenemos:

Black: las personas llamadas "Black".

Brown: las personas llamadas "Brown".

White: las personas llamadas "White".

Cada uno de estos conjuntos es disjunto con el resto (por ejemplo Black·White=0, y así con todos, pues cada persona se llama de una y sólo de una forma), y tienen, por la definición del problema, exactamente dos elementos cada uno: un viajero y un ferroviario. O sea, la intersección de cada uno de estos conjuntos con "Ferro" y "Viaje" no es nula: hay exactamente una única persona que está en cada intersección: por ejemplo, Ferro·Black ó Viaje·White, etc.

Además, tenemos otros tres conjuntos unipersonales:

Maq: el Maquinista.

JefT: el Jefe de Tren.

Cam: el Camarero.

Sí, son conjuntos también, aunque sólo tengan un elemento cada uno. Conjuntos pequeñitos, vale, minúsculos, pero conjuntos, al fin.

De nuevo, todos ellos son disjuntos entre sí (Maq·Jeft=0, y así con todos), y sólo tienen un único componente, pero todos ellos son subconjuntos de Ferro, es decir, Maq ≤Ferro, JefT≤Ferro y Cam≤Ferro (o sea, Maq·Ferro'=0, etc).

Ya tenemos los conjuntos básicos definidos y sus relaciones intrínsecas... ahora hay que averiguar quién es quién, que es lo divertido.

Una buena opción es escribir la **Forma Normal Disyuntiva Completa** del problema, es decir, cuál sería la tabla de posibles situaciones correspondiente a la función buscada, sabiendo que de todos sus términos sólo uno será 1 y el resto, 0.

Y para escribir la FNDC correctamente, lo primero que hay que tener en cuenta es qué combinaciones de nombres con cada uno de los ferroviarios son posibles. Tenemos tres nombres a asignar a tres personas, lo que implica unas buenas **permutaciones de 3 elementos**, o sea, factorial de 3, es decir, 3!, o sea, 3·2·1, en definitiva 6 combinaciones posibles.

Son las siguientes:

Maq≤Black · JefT≤Brown · Cam≤White +

Maq≤Black · JefT≤White · Cam≤Brown +

Maq≤Brown · JefT≤Black · Cam≤White +

Maq≤Brown · JefT≤White · Cam≤Black +

Maq≤White · JefT≤Black · Cam≤Brown +

Maq≤White · JefT≤Brown · Cam≤Black

No hay más posibilidades: como augura la FNDC (y el sentido común) sólo una de las seis combinaciones es válida, siendo las otras cinco el conjunto vacío.

Hay ahora que ir aplicando las pistas que nos dan para ir *podando* opciones que sepamos que su valor es cero, o sea, imposibles. Vamos con ello.

Reordenemos en primer lugar las pistas en el orden que nos viene mejor:

Pista 1: **El empleado de ferrocarriles de nombre White gana siempre al ajedrez al jefe del tren.**

Esta pista nos indica simplemente que White NO es el Jefe de Tren. O sea, que JefT≤White', o sea, JefT·White=0. Aquellos términos de la FNDC donde aparezca el término JefT≤White los podemos descartar.

Esto es bastante sencillo, me parece. ¿De acuerdo hasta aquí?

Bien. Una vez eliminadas estas dos combinaciones imposibles, quedan solamente cuatro posibilidades:

Maq≤Black · JefT≤Brown · Cam≤White +

Maq≤Brown · JefT≤Black · Cam≤White +

Maq≤White · JefT≤Black · Cam≤Brown +

Maq≤White · JefT≤Brown · Cam≤Black

Mmmm. En realidad, ésta era la pista fácil. Veamos cómo seguimos.

Pista 2: **El viajero Black vive en Washington.**

Pista 3: **El viajero que se llama igual que el camarero vive en New York.**

A partir de aquí, para ser riguroso, necesitaría definir todos los conjuntos que van apareciendo en el enunciado, tales como **NY** (el conjunto de los que viven en New York), o **200K (**el conjunto de aquellos afortunados que ganan exactamente 200.000 dólares anuales), etc, etc, y luego ir definiendo las ecuaciones pertinentes, tales como Viaje·Black≤Wash, (el viajero Black es de los que vive en Washington), etc. Sin embargo, creo que no es necesario, así que a partir de aquí utilizaré un lenguaje "normal", creo que se entenderá mejor y, sobre todo, que se seguirá mejor la explicación. Siempre podéis definir vosotros mismos esos conjuntos "auxiliares" para hacerlo más formal, si os place.

Volvamos a nuestras pistas 2 y 3. El viajero que se llama igual que el camarero vive en New York, por un lado, y por otro, el viajero Black vive en Washington... que, por lo que sabemos, no es la misma ciudad que New York. Eso quiere decir ni más ni menos que el viajero que vive en New York no es Black (o sea, Viaje·NY≤Black'), y, de rebote, tampoco el camarero es Black, por lo tanto.

Por lo tanto, Black NO es el Camarero. O sea, que Cam≤Black', o sea, Cam·Black=0. Aquellos términos de la FNDC donde aparezca que Cam≤Black los podemos descartar. El término, en realidad, pues sólo quedaba uno.

Suprimida ésta única combinación que sabemos que es imposible, quedan estas tres:

Maq≤Black · JefT≤Brown · Cam≤White +

Maq≤Brown · JefT≤Black · Cam≤White +

Maq≤White · JefT≤Black · Cam≤Brown

Vamos ya con el resto de pistas.

Pista 3: **El camarero vive a mitad de camino entre Washington y New York.**

Pista 4: **El viajero Brown gana doscientos mil dólares justos al año.**

Pista 5: **Uno de los viajeros es vecino del camarero y gana exactamente, hasta el último céntimo, el triple que él**.

Tenemos situado al viajero Black, que vive en Washington. Un viajero vive junto al camarero (digamos que en Philadelphia, a mitad de camino entre Washington y New York), y gana el triple exacto que él, mientras que Brown, el viajero, gana doscientos mil dólares justos.

Resulta que 200.000 no es divisible "hasta el último céntimo" por 3.

Brown, por tanto, no puede ser el viajero que gana tres veces exactas más que el camarero. Ése, que vive al lado del camarero, decíamos que en Philadelphia, debe ser White por eliminación, ya que Black vive en Washington, según la pista 2. Es decir, el viajero Black vive en Washington y el viajero White, en Philadelphia.

Luego el viajero Brown, que es el que queda por situar, vive, por eliminación, en New York, y se llama igual que el camarero, según la pista 2. Luego el Camarero es Brown, es decir: Cam≤Brown. Por tanto, podemos desechar aquellas combinaciones de las restantes que impliquen que el camarero NO se llame Brown, o dicho en álgebra de conjuntos, donde Cam≤Brown' (es decir, Cam≤Black y Cam≤White), pues en ambos casos son 0, el conjunto vacío.

Tras esta eliminación, sólo ha quedado una combinación factible de las seis originales:

Maq≤White · JefT≤Black · Cam≤Brown

Por consiguiente, así se reparten definitivamente los nombres:

El camarero se llama Brown, el Jefe de Tren se llama Black y el Maquinista, White.

White es, pues, el nombre del maquinista. Y, por tanto, la solución al acertijo.

Fácil... ¿no?

Apéndice II - La reducción de Karnaugh, por J

A lo largo de este librito hemos visto la lógica booleana y cómo reducir cualesquiera funciones booleanas a su Forma Normal Disyuntiva. Luego, en el artículo dedicado al Álgebra de Circuitos, vimos que ésta era una vulgar álgebra de Boole, y cómo aplicarla para diseñar circuitos eléctricos. En aquel capítulo se citaba de pasada que D. José Cuena dedicó quizá un par de clases a describir cómo se simplificaban circuitos y, en concreto, al método de Karnaugh aplicado a circuitos eléctricos, pero no entramos a describirlo, ni siquiera a definirlo.

Pero hete aquí que nuestro amigo J vino a solucionar esta carencia en un artículo en el que nos definió cómo era y cómo funcionaba la así llamada "**reducción de Karnaugh**". Cedamos, pues, la palabra a J:

La reducción de Karnaugh es un método poco formal, pero muy *ingenieril* y *astucioso*, de buscar la manera de usar los mínimos términos posibles para definir una función lógica, y que además esos términos tengan los mínimos componentes posibles.

Para ello, empecemos por un ejemplo: supongamos que tenemos una función lógica F con dos entradas A y B, y que su definición, en Forma Normal Disyuntiva, es:

F= AB' + A'B + A'B'

Pensando un poco podríamos llegar a darnos cuenta de que esta fórmula es bastante complicada, pues tiene muchos términos, y que podríamos simplificarla a:

F=A'+B'

¿Estáis de acuerdo en que ambas fórmulas son la misma función? Haced las tablas de estados de ambas funciones y veréis que es la misma.

¿Ya habéis vuelto?

¿Habéis necesitado hacer las tablas para verificar que son en realidad la misma función?

¿O quizá habéis utilizado el método algebraico para generar la FND de ambas funciones y comprobar que son la misma? En el fondo, ambas cosas son lo mismo.

Pero… ¿no parece que en este caso la FND es una cosa muy engorrosa? ¿No parece que tiene demasiados términos? Está bien, nos confirma que ambas funciones son la misma, pero además de eso a mí me gustaría que, si me dieran la primera función, fuera capaz de llegar a la segunda con facilidad, ¿no?

Y eso que esta función sólo tiene dos variables… imaginaos que tuviera más.

Pues eso es lo que intenta solucionar el **método de Karnaugh**: ***encontrar una forma simplificada de una función dada***.

Para ello, nos aprovecharemos de que el cerebro humano es muy bueno reconociendo patrones visuales. No tengo nada claro que pueda contar el procedimiento de manera muy formal, porque además estoy hablando sobre todo de memoria (tiré todos mis apuntes en los que aprendí esto)… pero vaya, es como me lo contaron a mí. Y además he mirado un poco en la Wikipedia, lo confieso.

El problema es que para reconocer esos patrones visuales, tenemos que dibujar, y a día de hoy sólo somos capaces de dibujar en 2D en un papel. Eso limita mucho la cantidad de variables que podemos manejar. A mí me resulta difícil hacer mapas de Karnaugh que tengan más de 4 variables, y cuando intento hacerlos de 5 ó más variables, ya empiezo a pensar en cómo sería el programa que podría hacerlo. Así que voy a contaros el ejemplo de 4 variables, que es el más complejo que podemos pintar con facilidad.

Vamos a suponer una función de 4 variables, que hemos representado según una tabla. Las columnas A, B, C y D son, obviamente, las 4 variables, y F es el resultado de la función.

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Lo primero que debemos hacer es conocer el concepto de **código circular de Gray**.

¿Qué es eso? En un código de Gray tenemos que hacer que **entre dos valores consecutivos cualesquiera la única diferencia sea el valor de una sola de las variables**.

Jo, qué difícil. Cuando a mí me lo contaron lo hicieron aprovechando los conceptos de *bit* y *código binario*, que ya conocía de antemano, así que contároslo sin recurrir a ello se me hace complicado… en fin, probemos con un ejemplo.

Si tenemos 2 variables, solemos ordenarlas así:

0 - 0

0 - 1

1 - 0

1 - 1

Entre la primera fila y la segunda sólo cambia un valor: el segundo 0 se ha convertido en un 1. Pero entre la segunda fila y la tercera cambian dos valores: el 0 se ha convertido en un 1, y el 1 se ha convertido en un 0.

Peor aún: hemos dicho *circular*… es decir, que cuando llegamos al final, volvemos a empezar por el principio. Es decir, también tenemos que mirar que tras la fila 4ª viene la fila 1ª. En este caso, los dos 0's se han convertido en sendos 1's.

No podemos decir que esto siga el código de Gray, tal como lo hemos definido antes…

El código de Gray de 2 variables es el siguiente:

0 - 0

0 - 1

1 - 1

1 - 0

Fijaos que ahora sí que sólo hay un cambio entre la fila 2ª y 3ª, y lo mismo entre la fila 4ª y 1ª, así como entre todas las demás filas consecutivas.

En este momento, a las personas que saben la representación binaria y cómo se codifican los números decimales en notación binaria (que probablemente son todos nuestros lectores, porque hoy en día esto se enseña en el colegio, aunque a gente de la edad de Macluskey le costara una carrera entera para enterarse), se les revuelven las tripas, porque parece como si estuviéramos desordenando los números… pues no.

Destierra esa idea de tu cabeza, no traduzcas esos números binarios a decimal. Sólo estamos describiendo el comportamiento de nuestra función ante las distintas entradas… ¿qué más da que primero escribamos una fila o la otra? Lo importante es que las escribamos todas.

Podríamos generalizar esta idea para 3 ó 4 bits, pero en realidad no nos hace falta para nuestro mapa de Karnaugh. Consultar la página de la Wikipedia sobre el Código de Gray si lo necesitáis algún día.

Vale, pues ahora dibujamos una matriz bidimensional, donde en cada eje pongamos 4 valores, ordenados según el código de Gray:

		AB			
		00	01	11	10
CD	00				
	01				
	11				
	10				

Como tenemos 4 variables de entrada, ponemos 2 variables en filas y 2 en columnas, es decir, 4 filas y 4 columnas, y así cubrimos todas las 16 posibles combinaciones. Si tuviéramos 3 variables, podríamos sólo 2 filas y cuatro columnas, por ejemplo. Y si tuviéramos sólo 2 variables, pondríamos solamente 2 filas y 2 columnas.

Esta tabla se llama **mapa de Karnaugh**, y es el corazón del método.

Ahora trasladamos los valores desde nuestra tabla de estado de la función a nuestro mapa de Karnaugh, pero con cuidado de darnos cuenta de que las filas y columnas están ordenadas de una forma "rara":

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	1

Hasta aquí, fácil.

Ahora es cuando viene *el arte*: hay que buscar los grupos que tengan 16, 8, 4, 2 y 1 *unos* juntos en un rectángulo (no valen formas raras: tienen que ser obligatoriamente rectángulos).

Empezamos buscando grupos de 16 *unos* todos juntos.

Obviamente, no tenemos ninguno, porque entonces tendríamos una función que siempre tiene *unos*… vaya tontería de función, que siempre da el mismo resultado sea cuales fueran sus entradas… pero bueno, teóricamente sí es posible.

Como no hay, buscamos grupos de 8 *unos* juntos. Tampoco tenemos ninguno.

Buscamos entonces los grupos de 4 *unos* juntos. Yo veo uno muy obvio.

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	1

Existe otro más, que se solapa parcialmente con el grupo anterior. No hay ningún problema en que solapen, así que lo marcamos también.

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	1

Ya no hay más grupos de 4 *unos* juntos, así que empezamos a buscar los grupos de 2 *unos* juntos. Encontramos un grupo y lo marcamos.

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	1

No es necesario marcar los grupos de 2 *unos* que ya formen parte completamente de los grupos de 4 (o de 8, etc) que hayamos marcado antes (como por ejemplo, tomar de 2 en 2 los que ya tenemos en el grupo azul), pero sí los que se solapen parcialmente, si los hay.

También debemos tener cuidado para no crear más grupos de los necesarios, pues existen situaciones en que, por ejemplo, dos grupos astutamente elegidos serían suficientes, pero si nos confundimos podríamos necesitar 3. No sé si existe un algoritmo óptimo que encuentre los grupos y te garantice que son como deben ser… yo siempre lo he hecho a ojo; al fin y al cabo con 16 celdas tampoco es tan difícil.

Luego ya no hay más grupos de 2 *unos*…

…

¿Seguro?

…

Pues sí, hay otro. Al haber usado un código circular de Gray, lo que "sale" por la derecha, "entra" por la izquierda y viceversa: técnicamente se dice que tiene topología de toro o de toroide. Por lo tanto, sí existe un grupo más, que marcamos en amarillo:

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	1

Obviamente, lo mismo ocurre entre arriba y abajo (lo que "sale" por abajo, "entra" por arriba). Además, podría habernos ocurrido esto mucho antes de haber llegado a los grupos de 2, por ejemplo cuando buscábamos grupos de 4 ó de 8. Este ejemplo lo hemos elegido cuidadosamente para ir mostrando las cosas poco a poco, pero en cualquiera de nuestras búsquedas debemos tener esto en cuenta.

Bueno, finalmente debemos marcar los *unos* que queden sueltos… son grupos de 1 elemento. Un grupo de 1 único *uno* es muy triste, pero también tiene derecho, el pobre. En el ejemplo no hay ninguno: todos los *unos* han sido asignados ya a grupos.

Bien, pues cada uno de esos grupos será un término en nuestra función simplificada. En nuestro ejemplo, tenemos 4 términos.

Para construir cada uno de los términos debemos fijarnos en las únicas variables que sean fijas en todo el grupo.

Por ejemplo, para el grupo azul vemos que A siempre vale 0 y B siempre vale 0, mientras que C y D recorren todo el espectro de posibles valores. Así que tenemos que para el grupo azul sólo es importante que A=0 y B=0. Sabemos cuál es la fórmula de eso: A’B’. Debemos darnos cuenta de que podemos hacer esto porque hemos ordenado las filas y columnas según un código de Gray, donde un elemento y el siguiente se diferencian sólo en uno de los valores… ahora entiendes por qué lo hacíamos, ¿verdad?

Deduciendo de la misma forma encontramos que el grupo rojo es A’C', porque sólo B y D barren todos los valores posibles. Los grupos verde y amarillo, como son de sólo 2 elementos, necesitan 3 variables, pero podemos deducir del mismo modo que son ABD y B’CD’ respectivamente.

Así que nuestra fórmula completa es:

F=A’B’ + A’C’ + ABD + B’CD’

Podemos entender este método de Karnaugh como lo contrario a la Forma Normal Disyuntiva. La FND pretendía tener *todas las variables* en cada término, mientras que este método pretende tener *el mínimo posible de variables* en cada término. A lo largo del libro hemos visto que estas dos aproximaciones tienen su utilidad en el mundo real.

Si hubiéramos querido hacerlo para 5 ó 6 variables, tendríamos que haberle dado “profundidad” a la matriz, con una tercera dimensión. Pero como no podemos pintar en 3D, se suele poner una segunda matriz a la derecha (para el caso de 5 variables) y otras dos más debajo (para el caso de 6 variables)… pero en esos casos ya resulta muy complicado buscar los patrones vi-

sualmente. El procedimiento es el mismo, sólo hace falta ser capaz de buscar los patrones saltando de matriz en matriz… y no es nada sencillo.

Finalmente, podemos pensar un poco y darnos cuenta de que si, en vez de agrupar los *unos*, agrupamos los *ceros*, podemos construir una suma para cada uno de los grupos y luego multiplicarlos todos, y así llegamos a la fórmula equivalente donde, en vez de tener sumas de productos, tenemos productos de sumas. Todo, todo en el álgebra de Boole es dual, y esto no iba a ser menos.

Y hasta aquí el método de Karnaugh de reducción de funciones.

Apéndice III - Lógica digital, por J

A lo largo del libro hemos visto lo importante que era la asignatura en que dicho libro se basa (*Metodología*, de Segundo de Informática, allá por 1973) para los informáticos en ciernes, y hemos visto algunos ejemplos por el camino, como su aplicación a la redacción de los *if* de los lenguajes de programación.

Una de dichas aplicaciones, quizá una de las más importantes, es el **diseño y fabricación de los circuitos digitales**, que permiten tomar un conjunto de entradas digitales binarias y obtener un resultado 1 ó 0. Pero, claro, como estamos siguiendo los apuntes de hace un porrón de años, en aquel momento no se contaba nada de eso en la Escuela de Informática. Por entonces las grandes empresas tenían uno o dos ordenadores enormes (de tamaño), la memoria de esos ordenadores era de ferritas, y si tenías 64 Kb ya eras un afortunado, así que no se contaba nada de esto, salvo algún profesor avanzado que avanzaba que "había una cosa nueva, de nombre *flip-flop*, que revolucionaría la informática del futuro…". ¡Qué tiempos!

Así que nuestro querido J acudió a ponernos al día acerca de cómo se diseñan puertas lógicas en base a la tecnología actual… y al impasible álgebra de Boole, que todo lo gobierna. Cedamos nuevamente la palabra a J:

Cuando Macluskey estudió aquella asignatura en los tiempos del cuplé, les contaron interruptores (pero no puertas lógicas) probablemente porque se pensaba que muchos ingenieros informáticos tendrían que dedicarse al *hardware*, y el tiempo ha demostrado que… se equivocaron. La inmensa mayoría de los ingenieros informáticos se dedican al *software*. De hecho, yo soy *teleco* y también estudié interruptores en la carrera (aunque unos pocos años después de Mac), y después de eso, puertas lógicas, pensando en que probablemente los telecos, esos sí, se iban a dedicar al *hardware*… pero jamás lo he usado en mi vida profesional, aunque sí en la privada… pero, ejem, es que yo soy bastante friki.

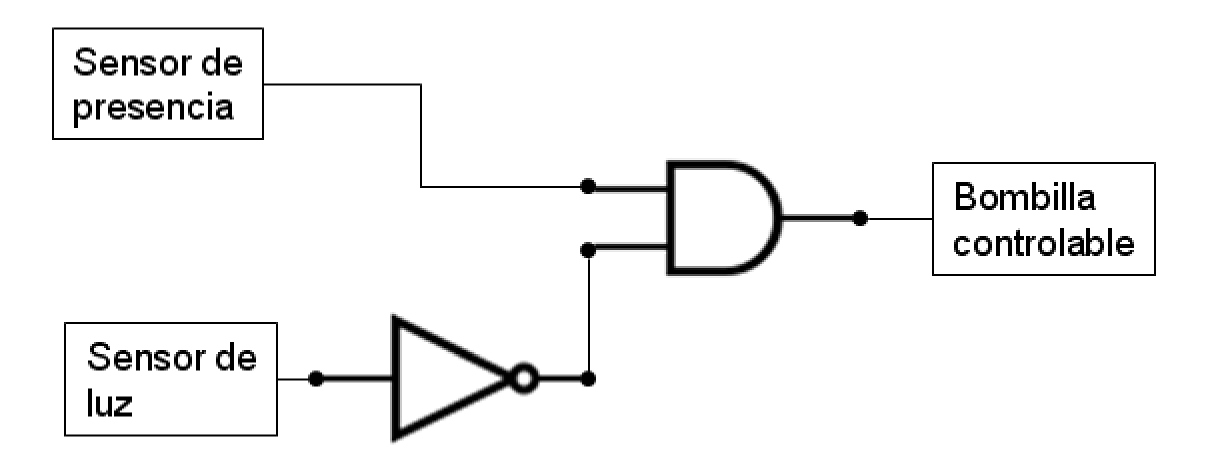
En este anexo repasaremos un poquito cuáles son las principales tecnologías *hardware* para hacer esto.

Para empezar a ver la utilidad de esto, y antes de entrar en formalismos, vamos a tratar de poner un ejemplo. Supongamos que yo tengo:

- Un sensor que detecta si entra luz por la ventana. Si entra luz genera un 1, y si no, un 0 (ya veremos luego cómo representamos todo esto físicamente).
- Un sensor de movimiento que me detecta si estoy en la habitación, generando un 1 si estoy, y un 0 en caso contrario.
- Una luz que se enciende cuando recibe un 1, y que se apaga cuando recibe un 0.

¿Podría yo crear un circuito digital que encienda la luz cuando estoy en la habitación pero no entra luz por la ventana? A lo mejor me gustaría que la luz del pasillo se encienda automáticamente cuando viene alguien, pero, claro, sólo cuando no haya luz natural, que hay que ahorrar…

La respuesta es sí, podría diseñar un circuito digital que haga eso exactamente. El circuito más sencillo que lo logra es el siguiente:



¡Hey! ¿Qué son esos dibujos extraños que hemos puesto entre los sensores y la bombilla? Esos dibujos son **puertas lógicas**.

La primera de las puertas lógicas, la que parece una D mayúscula, es una **puerta AND**. Su trabajo (la veremos formalmente un poco más adelante) es poner un 1 en la salida si en ambas entradas hay un 1, y un 0 en cualquier otro caso.

La segunda de las puertas lógicas, la que parece un triángulo con un círculo en la punta, es una **puerta NOT**. Su trabajo es poner en la salida lo contrario de lo que haya en la entrada, y la veremos también en un ratito.

Piénsalo un poco, y resumamos en la siguiente tabla cuáles son los cuatro posibles estados del sistema:

Sensor de presencia	Sensor de luz	Bombilla
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Si lo pensáis un poco, esa tabla resume exactamente lo que queríamos hacer: la luz se enciende si detecta a alguien, pero solamente si es de noche, o al menos no entra luz suficiente por la ventana.

Fácil, ¿verdad?

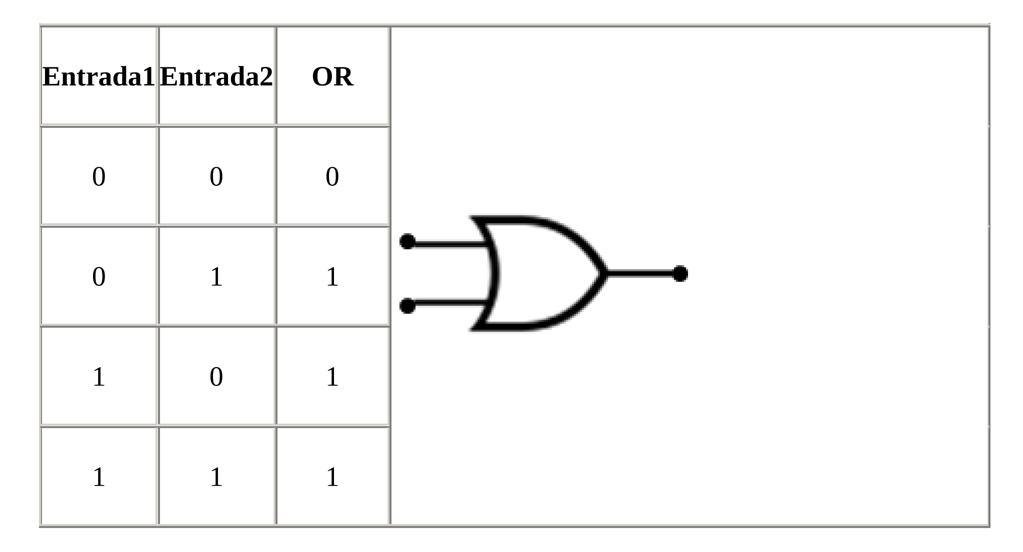
Existen 3 puertas lógicas básicas: **AND**, **OR** y **NOT.** Supongo que, dado el punto del libro en el que estamos, y dado que quizá adivinas algo de lo que vamos a decir en los próximo párrafos, no te sorprenderán esos nombres.

Veamos ahora cómo funciona y cómo se representa cada tipo de puerta.

Una **puerta AND** se representa por el siguiente símbolo, y define su comportamiento según la siguiente tabla:

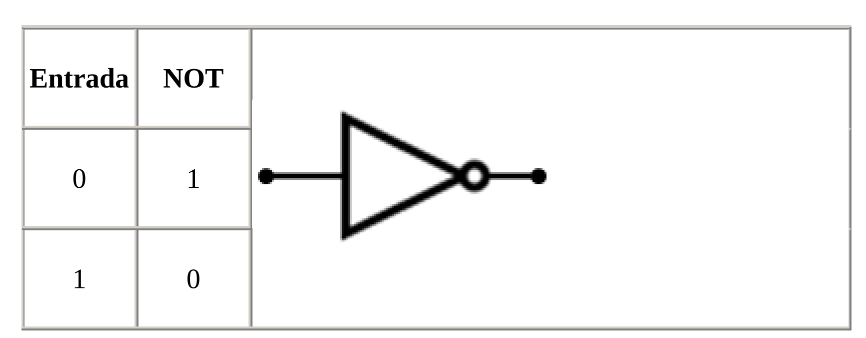
Entrada1	Entrada2	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Una **puerta OR** se representa por el siguiente símbolo, y define su comportamiento según la siguiente tabla:



Entrada1	Entrada2	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Finalmente, una **puerta NOT** se representa por el siguiente símbolo, y define su comportamiento según la siguiente tabla:



Entrada	NOT
0	1
1	0

¿**Será**, por un casual, **el conjunto (S, OR, AND), junto con la puerta NOT, siendo S los dos posibles valores {0,1}, un álgebra de Boole**?

Ya sabemos cómo demostrarlo, si fuera necesario, por anteriores artículos del libro… pero no creo que haga falta hacerlo: **sí, obviamente, es un álgebra de Boole**. De hecho, a poco inglés que sepamos, sabemos que AND significa Y, OR significa O y NOT significa NO… y eso nos da muchas pistas.

No vamos a demostrarlo aquí, porque ya lo ha hecho Macluskey en otros capítulos del libro, y aquí se haría igual.

Eso significa que podemos definir funciones a base de combinar puertas lógicas, y que podemos aplicarles a esas funciones todas las operaciones que veíamos en un álgebra de Boole, tales como la conmutatividad y asociatividad, las leyes de De Morgan, la simplificación de Karnaugh, su descripción en Forma Normal Disyuntiva (FND) o Conjuntiva (FNC), o muchas otras. De hecho, es muy habitual definir las funciones de lógica digital precisamente con la misma notación que se lleva usando en el resto del libro: el símbolo de + para el OR; y el punto de multiplicación o simplemente nada para el AND. Para el NOT se usa a menudo una barra horizontal sobre la variable o una tilde tras ella… como hemos ido haciendo en el resto del libro, vaya.

Por ejemplo, para definir nuestro circuito de arriba, si llamamos L al sensor de luz exterior, P al sensor de presencia y S a la salida, podemos decir que S=P·L’.

Saber que las puertas lógicas forman un álgebra de Boole tiene su importancia. Por ejemplo, si definimos nuestra función digital en forma de tabla, podemos usar la simplificación de Karnaugh para encontrar la función digital que menos términos tiene (es decir, *que menos puertas lógicas necesita*). Esto es importante, porque a veces tener más puertas significa utilizar más mm^2 de la oblea de silicio en que se fabrican los componentes y, por lo tanto, el circuito resulta más caro.

O también podemos encontrar la FND de cualquier circuito para comprobar si dos circuitos lógicos son en realidad el mismo. Por cierto, que esta FND tiene una ventaja adicional: al parecer es relativamente sencillo, por la forma en que se fabrican los cir-

cuitos integrados, tomar todas las entradas, pasarlas agrupadas por un montón de puertas AND y el resultado pasarlo por una única puerta OR... Es decir, la representación en FND de la función. Al parecer, dependiendo de la tecnología que se utilice, esto puede ser más fácil (es decir, más barato de fabricar) que el circuito de Karnaugh equivalente, aunque aparentemente tenga más puertas (parece ser que este hecho tiene que ver con la distribución física de las distintas bandas de dopaje sobre el silicio).

Por comodidad, se suelen definir también unas cuantas puertas lógicas más: **XOR**, **NOR**, **XNOR** y **NAND**. Pero no olvidemos que todas ellas se pueden representar simplemente como una combinación de AND, OR y NOT, como supongo que ya sabrás si has leído el resto del libro.

XOR es el OR eXclusivo que ya ha salido otras veces en el libro, y se suele representar con un + rodeado con círculo: $A \oplus B = A'B + AB'$. A menudo se dice que ésta es la puerta de la suma (y no el OR, como podría parecer por el símbolo), porque si sumo con sumas “normales”, en realidad me sale lo que dice la puerta XOR…

¡Por Tutatis! ¿Y qué pasa con el 0 de la última fila? Ten en cuenta que estamos lidiando con sumas binarias, y 1+1=… 0… ¡y me llevo 1!, del mismo modo que en nuestro sistema decimal habitual, “5+5=0 y me llevo 1”.

A este “*me llevo 1*” se suele llamar *acarreo*, y se puede calcular simplemente con un AND.

A continuación la representación del XOR y la tabla que define su comportamiento:

A	B	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Sigamos. **NOR** es simplemente la combinación de NOT y OR. Así, por ejemplo: $A\ NOR\ B = \overline{A + B} = (A + B)' = A'B'$

Y ahora, su representación y la tabla que define su comportamiento:

A	B	NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

En cuanto a **XNOR**, es nada más que la combinación de NOT y XOR, y se suele representar mediante un punto rodeado de un círculo. Así, por ejemplo, tenemos:

$A\ XNOR\ B = A \odot B = \overline{A \oplus B} = (A'B + AB')' = AB + A'B'$.

Se suele decir que ésta es la puerta de la equivalencia, porque si os fijáis en la tabla veréis que esta función comprueba si A y

B son iguales, cosa que igualmente hace la puerta XOR, naturalmente, pero con las salidas cambiadas.

Como siempre, su representación y su tabla de funcionamiento:

A	B	XNOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Y finalmente, la puerta **NAND** es la combinación de NOT y AND, como por ejemplo en: $A\ NAND\ B = \overline{AB} = A' + B'$

Representación y tabla al canto:

A	B	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

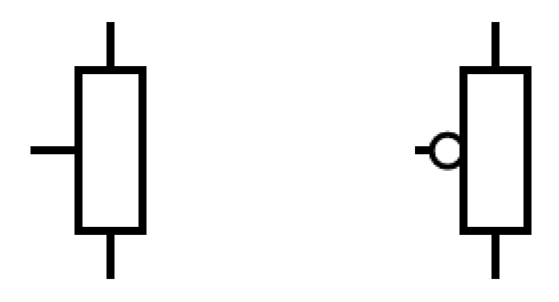
Bueno, ¿y todo esto qué tiene que ver con el álgebra de circuitos? Porque mucho decir que es continuación del álgebra de circuitos, pero hasta ahora sólo lo hemos tratado como una cosa independiente.

Pues sí tiene que ver, porque hasta ahora estas puertas lógicas que hemos visto son solamente un concepto abstracto, que vive en el mundo de las ideas de Platón.

¿Cómo trasladamos esas puertas ideales a componentes físicos con los que construir un ordenador?

En realidad, cómo lo hagamos depende de la tecnología que empleemos, pero hoy en día casi siempre es con interruptores como los que vimos en el capítulo III, el dedicado al álgebra de circuitos.

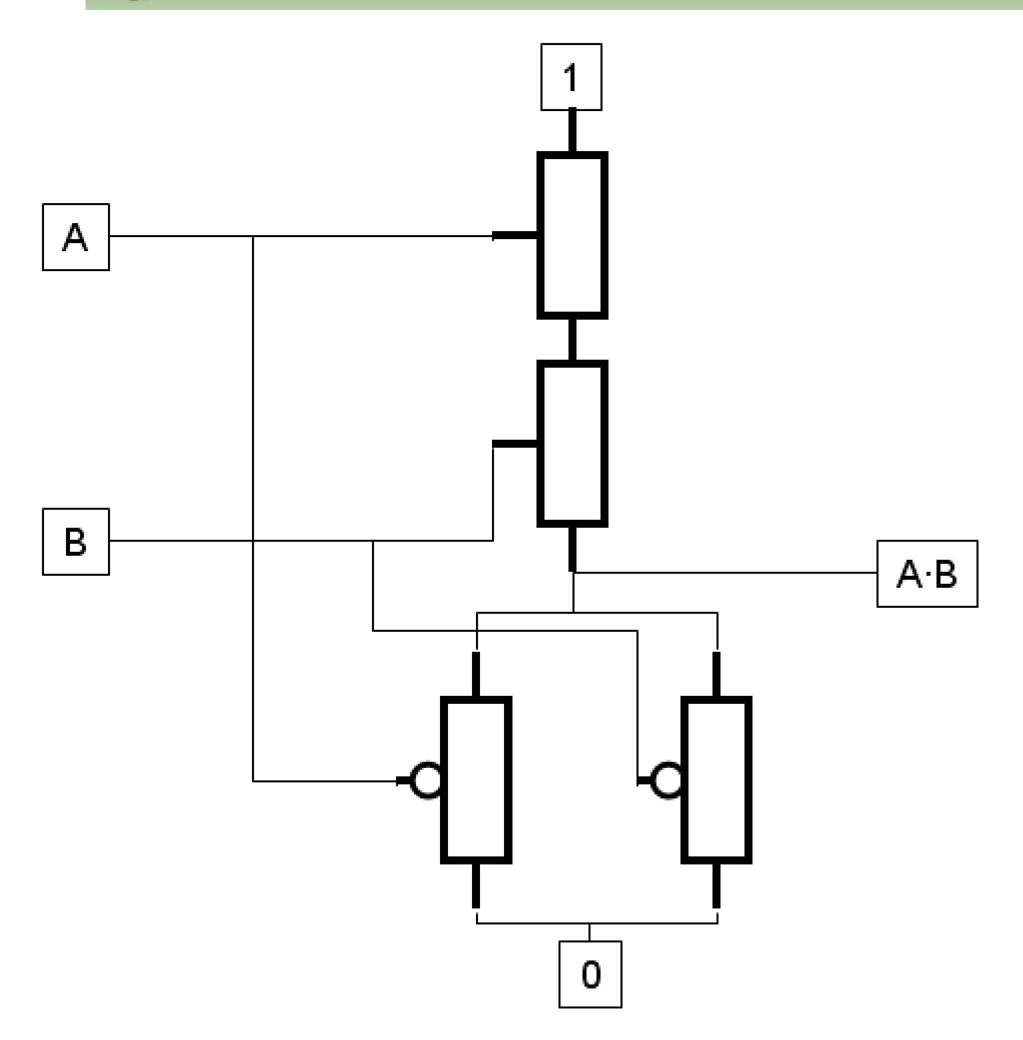
Pero antes… vaya… antes aún tenemos que dar un paso intermedio. Vamos a definir primero un interruptor ideal controlado por una señal. Bueno, mejor dicho, vamos a definir dos (en realidad hay ciertas tecnologías que usan un componente más: un atenuador o debilitador, pero son bastante poco usados):



El interruptor de la izquierda, cuando recibe un 1 por la patilla de control, cierra el circuito (es decir, deja pasar la corriente); y cuando recibe un 0, lo abre (interrumpe el paso de la corriente).

En cuanto al de la derecha, funciona exactamente al revés que el otro: cierra el circuito cuando recibe un 0 y lo abre cuando recibe un 1 por la patilla de control.

Bueno, pues combinando estos dos interruptores podemos construir todos los tipos de puerta que hemos definido antes. Por ejemplo, veamos cómo es una puerta AND construida con estos interruptores:



Si lo pensamos un poco, vemos que este circuito cumple la tabla de la puerta AND: si alguna de las entradas A ó B es un 0, la parte superior del circuito está abierta, por lo que el 1 nunca llega hasta la salida, mientras que al menos uno de los interruptores de la parte de abajo lleva el 0 hasta la salida. Sólo si ambas entradas son un 1 se cierra la parte superior y se abre la inferior, llevando el 1 hasta la salida.

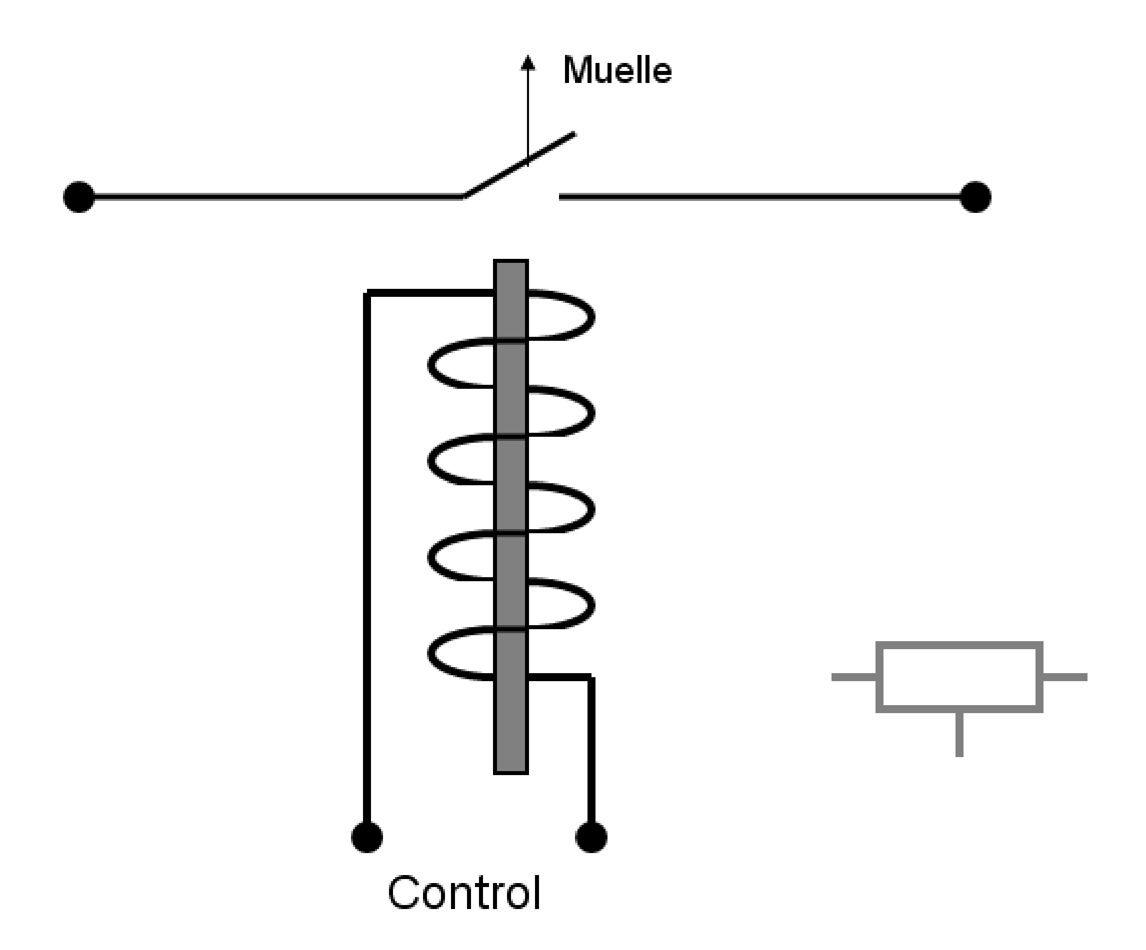
De forma similar podemos construir todas las demás puertas lógicas (aunque no vamos a verlas… hacedlo mentalmente o con lápiz y papel si lo deseáis).

Así que ya sólo nos queda definir **qué son ese 0 y ese 1**, y cómo son esos interruptores. De nuevo, eso depende de la tecnología que estemos usando, pero es muy habitual decir que el 1 son 5V y el 0 son 0V (eso se llama "lógica TTL"). En otras tecnologías se usan +12/-12V, 3.3/0 ó cosas así.

Para los interruptores, la tecnología más antigua que conozco se basa en **relés**. Tan antigua es esa tecnología que existen máquinas basadas en piezas mecánicas o en tuberías que consiguen cosas parecidas… ¡y tienen siglos de antigüedad! aunque es cierto que no dejan de ser unos meros juguetes ingeniosos.

Y es que un relé es en realidad una cosa muy tonta: un electroimán que cierra o abre un circuito.

Veamos a continuación el dibujo:



El muelle mantiene el circuito abierto por defecto. Cuando en las patillas de control metemos por ejemplo 5V, circula un montón de corriente por ahí, produciendo un electroimán que atrae al metal del interruptor, cerrando así el circuito. Ingenioso.

La tecnología es muy sencilla, fácil de fabricar, y se conoce desde que se conoce el electromagnetismo. La desventaja principal es que se basa en el movimiento de componentes físicos muy grandes, que tardan un montón de tiempo en moverse.

Cuando empieza a circular corriente por la bobina de control, empieza a atraer al interruptor para cerrarlo… pero ese cierre tarda unos cuantos milisegundos.

Puede parecer que unos pocos milisegundos es muy poco tiempo, pero piensa en que tu ordenador funciona probablemente, como poco, a un par de GHz… 2 mil millones de conmutaciones por segundo. O más. Es decir, que cada conmutación debe tardar menos de medio nanosegundo… decididamente, unos pocos milisegundos es muuuuuucho tiempo. Y eso por no hablar del precio.

Eso no impidió que se construyeran ordenadores con esta tecnología. Eran ordenadores primitivos, lentos (lentos si los comparamos con la actualidad: en su momento eran rapidísimos)… pero vaya, ordenadores al fin y al cabo.

Como curiosidad, para los que se dediquen a la programación, parece ser que el término *bug* proviene de que con esta tecnología los bichos (insectos, arañas, cosas así) se metían físicamente entre los contactos (*bug* es "bicho" en inglés) e impedían que los terminales hicieran contacto… y por lo tanto *debugar* (*debugging*) era ir con insecticida y pinza a quitar físicamente los bichos achicharrados del circuito.

Parece que fue Grace Hopper, la contraalmirante de la US Navy Grace Hopper, más bien, una de las mujeres más importantes en la historia de la informática (entre otras cosas, fue prácticamente ella la inventora del Cobol), quien acuñó el término "debug" cuando trabajaba con el UNIVAC 1, seguramente el primer ordenador utilizable comercialmente de la historia.

También de esta época es la palabra *hacker*. Al parecer, si un relé pasaba mucho tiempo en una determinada posición, sus terminales se empezaban a oxidar y ya no se movían. Así que unos expertos iban a darle un golpecito a la máquina, un onomatopéyico *hack!*, en donde lo necesitaba, para despegarlos (*hack* en inglés es algo así como "hachazo").



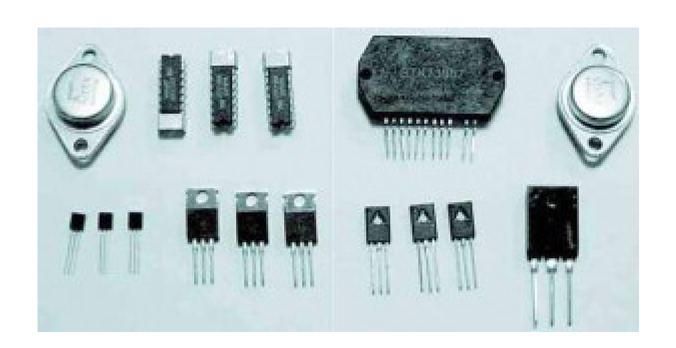
Válvula de vacío (RJB1, cc-by-sa)

Con el tiempo vinieron a sustituir a los relés los conmutadores de **válvulas de vacío**.

No conozco en detalle el principio físico en que se basan las válvulas, pero las más comunes de ellas se basan en que, cuando pasa corriente por los terminales de control, sube la temperatura, aumentando la cantidad de electrones libres, lo que permite el paso de corriente entre los bornes del interruptor. También pueden usarse como amplificadores, aprovechando la parte de su curva de comportamiento en que hay una relación lineal entre entrada y salida. De hecho Macluskey comenzó a ver la televisión (el único canal que había) a fines de los cincuenta, en un televisor de válvulas de enorme tamaño y diminuta pantalla… ¡qué bien se veía “Bonanza” en aquel televisor!

Su principal desventaja, además del precio, es el tamaño. Y el calor que desprenden. Aunque muchos melómanos siguen diciendo que los amplificadores de válvulas dan un sonido mucho más fiel al original que los de transistores (parece que tiene que ver con que el comportamiento de las válvulas es más lineal que el de los transistores, aunque con mi oído patatero soy incapaz de diferenciarlo), cuando se usan como conmutadores no les conozco ninguna ventaja frente a los transistores…

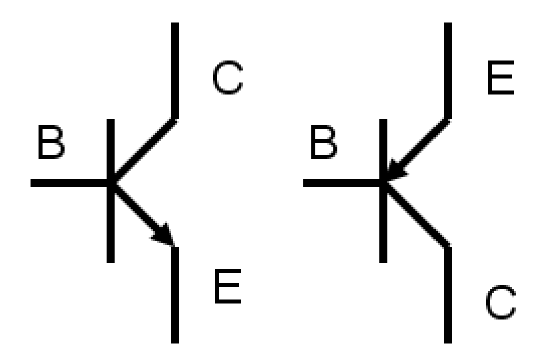
Y con esto, finalmente, llegamos a los **transistores**.



Distintos tipos de transistores... en encapsulados estandarizados

Si el principio de funcionamiento de las válvulas era complicado, del de los transistores no te digo nada… Al parecer, existen compuestos (típicamente de silicio con pequeñas cantidades de otros elementos, aunque se pueden usar otros, como el germanio) que no se pueden catalogar simplemente como conductores o aislantes… sino que, a pesar de que por defecto son aislantes, dependiendo de si por uno de los lados se les mete más o menos voltaje (o corriente, depende), empiezan a conducir (por eso se les llama precisamente *semiconductores*).

Uhm… ¿eso no es básicamente nuestro interruptor controlado por tensión?



Transistor bipolar NPN y PNP

El comportamiento detallado de un transistor (o sea, sus ecuaciones) depende del tipo que sea (bipolar, JFET, MOSFET…), pero cualitativamente podríamos describirlo así:

- Si la tensión entre Base y Emisor es muy pequeña, no circula corriente entre Colector y Emisor (es decir, son un interruptor abierto). A esto se le llama *zona de corte*.

- Si la tensión entre Base y Emisor es muy grande, no sólo circula corriente entre Colector y Emisor, sino que es virtualmente un cortocircuito, un interruptor cerrado. A esto se le llama *zona de saturación*.
- Si no es ni muy pequeña ni muy grande, la corriente que circula por el Colector es proporcional a la corriente que circula por la Base. A esto se le llama *zona lineal*.

Lo que hemos descrito es un transistor bipolar NPN. El PNP funciona igual, pero cambiando los signos de las tensiones y de las corrientes… la flecha da una pista de cómo circula la corriente. Los transistores JFET y MOSFET, aunque siguen ecuaciones distintas y tienen nombres distintos, son cualitativamente parecidos.

Cuando estamos usando un transistor para hacer un amplificador se utiliza la zona lineal, mientras que si lo que estamos haciendo es un interruptor controlable, se usan las zonas de saturación y corte… pues bien, podemos aprovechar eso para fabricar nuestros circuitos digitales.

Las ventajas de los transistores son muchas: pequeño tamaño (estamos hablando de nanómetros), pequeño consumo, muy baratos (aunque el proceso de fabricación es complicado, mucho más que el de un relé, está muy trillado ya en la industria), velocidades de conmutación asombrosamente altas (en electrónica de consumo estamos acostumbrados, por ejemplo, a microprocesadores que van a varios GHz… y eso es sólo la electrónica de consumo).

La única desventaja que se me ocurre de los transistores frente a los relés es que en general estos soportan más corriente y más voltaje. Además… parece que empezamos a encontrar el límite. Parece que estamos haciendo ya transistores muy pequeños, en los que los "microcomponentes" (el tamaño de las puertas) de los transistores se mide en "unos pocos átomos", y en esas situaciones empezamos a encontrar efectos cuánticos, el "efecto túnel" deja de ser despreciable y ya no está tan claro que podamos hablar de "circuitos abiertos" o "circuitos cerrados" y toda esa terminología electrónica. No sé yo cómo se podrían usar componentes que pueden estar "cerrados al 95%" o "abiertos al 80%" para representar señales digitales (0's y 1's, vaya).

Antes de despedirnos, una última salvedad: aquí hemos usado continuamente el término "digital" para referirnos a 1's y 0's, es decir, lógica digital binaria. Obviamente es posible otra lógica digital que no sea binaria, sino ternaria, cuaternaria… Esa lógica ya no sería un álgebra de Boole, pero es matemáticamente posible (aunque poco usada, ya que no sé si hay alguna situación no-binaria que no pueda resolverse con un uso ingenioso de la lógica binaria).

Y con esto nos despedimos. Hemos repasado las tecnologías involucradas de las puertas lógicas hacia abajo, hacia la física (por supuesto, sólo un análisis cualitativo; la fabricación real es sensiblemente más complicada).

Queda para otra ocasión la introducción de lo que hay desde las puertas lógicas *de abajo hacia arriba*, desde esas humildes puertas lógicas hasta llegar al ordenador que tienes en tus manos.

Fue un placer.